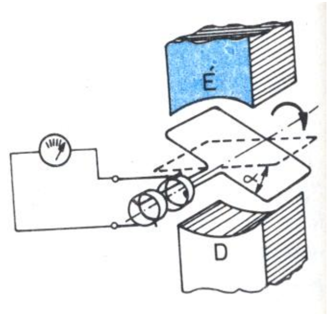
<u>A szinuszosan váltakozó feszültség és áram</u>

1. A szinuszos feszültség előállítása:

- Egy téglalap alakú vezető keretet egyenletesen forgatunk **ω** szögsebességgel egy homogén **B** indukciójú mágneses térben úgy, hogy a keret forgástengelye merőleges a mágneses tér erővonalaira. A vezető keret két kivezetésén egy, idő szerint szinuszosan váltakozó feszültség keletkezik. Feltételezzük, hogy a keret felülete **A.** A keletkezett feszültség *pillanatnyi értéke*:



$$u(t) = \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Ha a keret N db. menetet tartalmaz fémvezetőből, akkor:

$$u(t) = N \cdot \omega \cdot B \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Látszik a fenti kifejezésből, hogy a feszültség maximális értéke:

$$U_{\max} = N \cdot \omega \cdot B \cdot A$$

ω a feszültség jellemző mennyisége is. Azt mondjuk, hogy **ω** a feszültség körfrekvenciája**.**

$$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$$

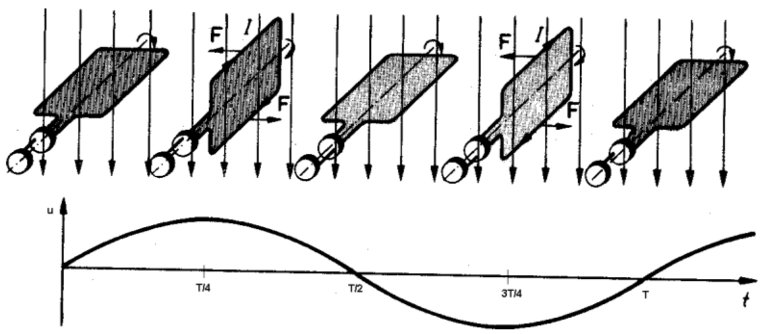
f a feszültség frekvenciája, vagy a keret forgásának fordulatszáma.

$$f = \frac{1}{T}$$

T a feszültség periódusideje. Ez idő alatt a feszültség egy „teljes rezgést” végez, ami azt jelenti, hogy a feszültség kétszer vált előjelet (polaritást) és kétszer veszi fel a nulla, valamint szélsőséges értéket.

A mágneses térben forgó keret a váltóáramú generátor egyszerűsített modellje.

Az ábra a forgó keret helyzeteit ábrázolja $0, \frac{T}{4}, \frac{T}{2}, \frac{3 \cdot T}{4}, T$ időpillanatokban, valamint a feszültség pillanatnyi értékét az idő függvényében.

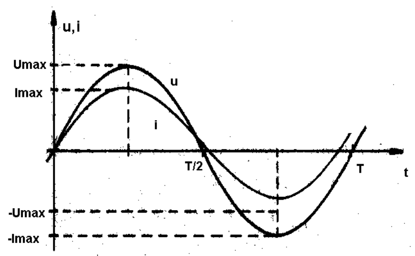


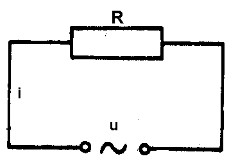
egyszerű generátor animációja:

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/generator_hu.htm

2. Aktív ohmos ellenállás viselkedése váltakozó feszültség esetén.

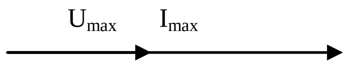
- Ha egy ohmikus ellenállást szinuszosan váltakozó feszültségre kapcsolunk a feszültség hatására a vezetőben egy szinuszosan váltakozó elektromos tér jön létre melynek hatására a vezető szabad





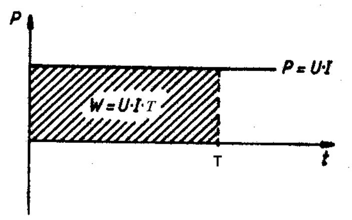
elektronjai lineáris-harmonikus rezgőmozgást fognak végezni → szinuszosan váltakozó áram (az áram iránya periódusonként kétszer változik, az áramerősség periódusonként kétszer veszi fel a nulla és szélsőséges értéket). Az elektronok rezgései fázisban vannak a rezgést keltő elektromos térrel, tehát a feszültséggel is. Az mondjuk, hogy az ellenállás árama fázisban van a rá kapcsolt feszültséggel. Ez azt jelenti, hogy az áramerősség valamint a feszültség egyszerre veszik fel a nulla, valamint a maximum és minimum értékeket. Ezt szemlélteti az ábra is.

- A szinuszosan váltakozó mennyiségeket nem csak grafikusan, hanem forgóvektoros módszerrel is ábrázolhatjuk. Minden szinuszosan váltakozó mennyiségnek megfeleltethetünk egy forgóvektort. A forgóvektor támadáspontja rögzített, a vektor hossza megegyezik a mennyiség maximális (vagy effektív) értékével. A vektor irányát viszonyíthatjuk egy önkényesen választott irányhoz, legyen ez a mis esetünkben a vízszintes irány. A vektornak a vízszintes iránnyal bezárt szöge megegyezik a szinuszos mennyiség fázisszögével (**ωt** szorzat). A vektor **ω** szögsebességgel egyenletesen forog a papír síkjában a támadáspontja körül trigonometriai irányban.
- Ha az ellenállásra kapcsolt feszültség $u = U_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$, akkor az áramkörben létrejövő áram $i = I_{max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$ és $I_{max} = \frac{U_{max}}{R}$. A két mennyiség fázisban van, mivel pillanatnyi fázisszögük (**ωt)** megegyezik. Ebben az esetben Ohm törvénye a pillanatnyi értékekre is igaz: $i = \frac{u}{R}$. A mennyiségek forgóvektoros ábrája:

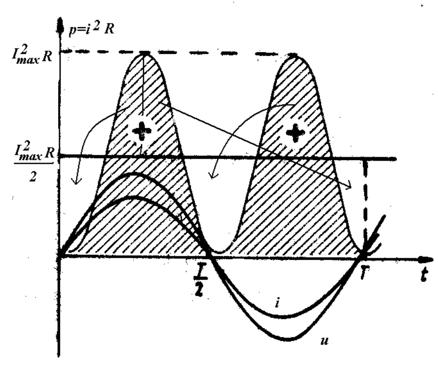


3. A váltakozó áram és feszültség effektív értéke.

- A váltakozó áramnak is van hőhatása ellenálláson való áthaladáskor. Ezt a hőhatást az elektronok rezgése váltja ki a vezető belső struktúrájában. A váltóáram effektív értékét azért vezetjük be, hogy megtudjuk mekkora erősségű egyenáram esetén lesz ugyanakkora a hőhatás.
- Meghatározás: Egy váltakozó áram effektív értéke egyenlő annak az egyenáramnak az áramerősségével, amely egy periódusidő alatt ugyanakkora mennyiségű hőt fejleszt ugyanazon az ohmikus ellenálláson, mint a váltóáram. Az első ábra egy egyenáram pillanatnyi teljesítményét ábrázolja az idő függvényében, a második ábra egy szinuszos áramét. Meghatározás szerint az ellenálláson **T** idő alatt fejlődő hőenergia egyenlő a teljesítmény görbéje alatti behúzott területtel:



$$W = Q = P \cdot T = I^2 \cdot R \cdot T$$



A második ábra a szinuszos áramerősséget (**i**) , valamint $p = i^2 \cdot R$ pillanatnyi teljesítményt ábrázolja. A fent említett szabályt alkalmazva a váltóáram hőtermelése **T** idő alatt egyenlő a teljesítmény (**p**) görbéje alatti területtel. Beláthatjuk, hogy ez a terület egyenlő annak a téglalapnak a területével melynek egyik oldala **T**, másik, pedig $\frac{I_{max}^2 \cdot R}{2}$. Tehát a váltóáram hőtermelése:

$$W = \frac{I_{max}^2 \cdot R}{2} \cdot T$$

Az effektív érték meghatározását figyelembe véve:

$$\frac{I_{max}^2 \cdot R}{2} \cdot T = I^2 \cdot R \cdot T \Rightarrow I = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$$

Tehát a váltóáram effektív értéke: $I = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. Ezentúl a mennyiségek effektív értékét nagybetűvel jelöljük. Egyes könyvekben ezt I_{eff}-el jelölik.
Hasonló módon határozhatjuk meg egy váltakozó feszültség effektív értékét:

$$U = U_{eff} = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

- A váltóáramú mérőműszerek effektív értékeket mérnek. A hálózati háztartásbeli feszültség effektív értéke 230V (frekvenciája 50Hz). Ez azt jelenti, hogy a hálózati feszültség maximális vagy csúcsértéke $230 \cdot \sqrt{2} \approx 314V$! Tehát a 230V effektív értékű hálózati feszültség egy periódusidő (vagy ennek többszöröse) alatt egy fűtőszálon ugyanakkora hőt fejleszt, mint egy 230V-os egyenfeszültség. (Felmerül a kérdés: melyik feszültséget lehet könnyebben, gazdaságosabban létrehozni és szállítani? Természetesen a váltakozó feszültséget!)

4. Ohmos ellenállás nélküli (ideális) tekercs viselkedése szinuszos feszültség esetén.

- Egy ilyen tekercs egyetlen elektromos jellemzője az önindukciós állandó. A tekercs ohmikus ellenállása nulla. Ha a tekercsre szinuszosan váltakozó feszültséget kapcsolunk, akkor a változó áram miatt önindukciós feszültség, és áram keletkezik a tekercsen, mely Lenz szabálya miatt olyan irányú, hogy ellenszegül a generátor által diktált áramnak. Ezért ez a tekercs ilyen módon ellenáll a váltakozó áram áthaladásának. Ezért egy tekercs egy reaktív ellenállást tanúsít a váltakozó áram áthaladásával szemben. Ezt az ellenállást induktív ellenállásnak nevezzük. Nehéz matematikai számításokkal igazolható, hogy az induktív ellenállás értéke:

$$x_L = \omega \cdot L = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L$$

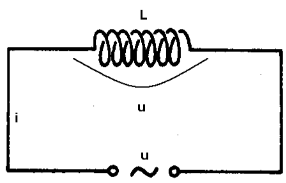
- Az induktív ellenállás annál nagyobb minél nagyobb a tekercs önindukciós állandója és minél nagyobb frekvenciával váltakozik a tekercsre kapcsolt feszültség.
A tekercs induktív ellenállása mellett egy fáziseltolódást is eredményez, melynek következtében az áram pillanatnyi értéke $\frac{\pi}{2}$ **radiánnal késik a pillanatnyi feszültséghez képest**. Ha a tápfeszültség pillanatnyi értéke:

$$u = U_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

akkor az áramerősség:

$$i = I_{\max} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{x_L}$$



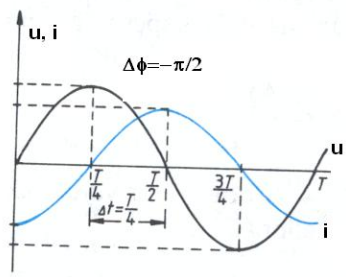
Ohm törvénye effektív értékekre is alkalmazható:

$$I = \frac{U}{x_L}$$

Mivel a feszültség és áram pillanatnyi értékei egymással fázisellentétben változnak (a feszültség pillanatnyi értéke akkor nulla, amikor az áramerősség pillanatnyi értéke szélsőséges), ohm törvénye nem alkalmazható a pillanatnyi értékekre:

$$i \neq \frac{u}{x_L}!$$

Az **u** és **i** grafikus valamint forgóvektoros ábrái:



5. Veszteség nélküli kondenzátor viselkedése szinuszos feszültség esetén.

- Egy ilyen kondenzátor egyetlen jellemzője a kapacitása. A veszteség nélküli kondenzátor egyenárambeli elektromos ellenállása végtelen nagy (∞). Ha a kondenzátorra szinuszosan váltakozó feszültséget kapcsolunk, akkor ez periodikusan töltődik és sül ki egyik és másik irányban. Ezért az áramkör összekötő vezetékeiben a töltések folyamatosan ide-oda mozognak, pontosabban lineáris harmonikus rezgéseket végeznek. Azt mondjuk, hogy a kondenzátor vezeti a váltakozó áramot. A kondenzátor is egy reaktív ellenállást tanúsít a váltóárammal szemben. Ezt nevezzük kapacitív ellenállásnak.

$$x_c = \frac{1}{\omega \cdot C} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C}$$

A kapacitív ellenállás annál nagyobb minél kisebb a kondenzátor kapacitása és minél kisebb a rá kapcsolt feszültség frekvenciája.

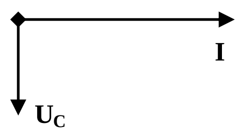
A kondenzátor egy fáziseltolódást is eredményez, melynek következtében az áram pillanatnyi értéke $\frac{\pi}{2}$ **radiánnal siet a pillanatnyi feszültséghez képest.** Ha a tápfeszültség pillanatnyi értéke:

$$u = U_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

akkor az áramerősség:

$$i = I_{\max} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I_{\max} = \frac{U_{\max}}{x_c}$$

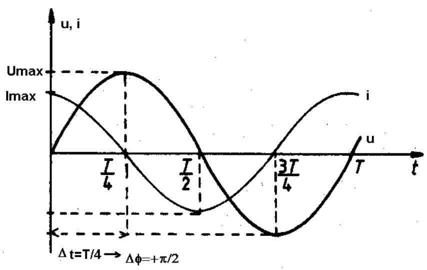


Ohm törvénye effektív értékekre is alkalmazható:

$$I = \frac{U}{x_c}$$

Mivel a feszültség és áram pillanatnyi értékei egymással fázisellentétben változnak (a feszültség pillanatnyi értéke akkor nulla, amikor az áramerősség pillanatnyi értéke szélsőséges), ohm törvénye nem alkalmazható a pillanatnyi értékekre:

$$i \neq \frac{u}{x_c}!$$



Egyszerű AC áramkör animációja:

http://www.walter-fendt.de/ph14hu/accircuit_hu.htm

6. A soros RLC áramkör.

Legyen egy olyan soros áramkör melynek elemei egy ohmikus **R** ellenállás, egy ideális **L** önindukciós állandójú tekercs és egy veszteség nélküli **C** kapacitású kondenzátor. Az áramkörre szinuszos feszültséget kapcsolunk. Tételezzük fel, hogy az áramkörön áthaladó áram:

$$i = I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

az áramkörre kapcsolt feszültség pedig:

$$u = U_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Az áramerősség kezdeti fázisát tekintjük nullának, mivel mindegyik elemen az **i** áram halad át tehát ehhez viszonyítunk. Feltételezzük, hogy a kapocsfeszültség **φ** fázisszöggel siet az áramhoz képest.

Az ellenállás pillanatnyi árama:

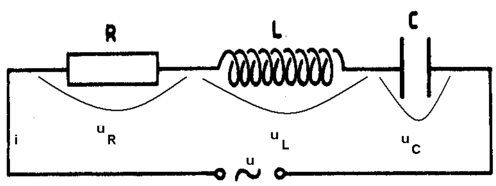
$$u_R = U_{R\max} \cdot \sin(\omega \cdot t) \text{mert ez a feszültség az árammal fázisban van.}$$

A tekercs feszültsége:

$$u_L = U_{L\max} \cdot \sin\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right)$$

A kondenzátor feszültsége:

$$u_C = U_{C\max} \cdot \sin\left(\omega \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)$$



Soros RLC kör

A feszültségek közötti összefüggés:

$$u = u_R + u_L + u_C$$

Az effektív vagy csúcsértékek esetén nem írható fel a fenti összefüggés:

$$U \neq U_R + U_L + U_C$$

Az elemekre vonatkozó ohm törvények:

$$I = \frac{U_R}{R} = \frac{U_L}{x_L} = \frac{U_C}{x_C}$$

Természetesen nagybetűkkel az effektív értékeket jelöltük.

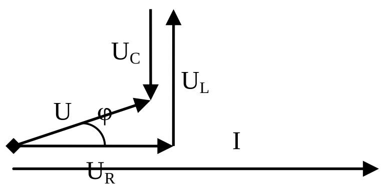
A $Z = \frac{U}{I} = \frac{U_{\max}}{I_{\max}}$ hányadost az áramkör impedanciájának (váltóárambeli ellenállás) nevezzük.

Általában egy áramkör vizsgálatakor adott a feszültség valamint az R,L,C értékek és keressük az Z, I, U_R, U_L, U_C és a fáziseltolódás értékét.

A probléma megoldása az áramkör feszültségeinek és áramának forgóvektoros ábrájából következik:

$$U^2 = U_R^2 + (U_L - U_C)^2 \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$$

$$tg\varphi = \frac{(U_L - U_C)}{U_R} = \frac{(x_L - x_C)}{R}$$



Ha $x_L > x_C$ akkor $\varphi > 0$, azt mondjuk, hogy az áramkör induktívan viselkedik

Ha $x_L < x_C$ akkor $\varphi < 0$, azt mondjuk, hogy az áramkör kapacitív módon viselkedik, tehát a kapocsfeszültség késik az áramhoz képest, vagy az áram siet a feszültséghez képest.

Egy érdekes esettel találkozunk akkor, ha $x_L = x_C$. Ebben az esetben $U_L = U_C$, ami azt jelenti, hogy a reaktív elemek effektív feszültségei egyenlők, de a pillanatnyi értékeik egymással fázisellentétben vannak ezért $u_L + u_C = 0$, tehát $u = u_R$. Ez azt jelenti, hogy az áramkört tápláló feszültség teljes egészében az ellenállásra esik. A reaktív elemek jól megválasztása esetén U_L, U_C értékei a tápfeszültség többszöröse is lehet. Ebben az esetben Z=R=minimális, φ=0, $I = \frac{U}{R}$ = maximális. Ezt a jelenséget nevezzük feszültség rezonanciának. Ez akkor alakul ki, ha a feszültség frekvenciája:

$$f = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}} \quad \text{(Thomson képlet)}$$

7. A szinuszosan váltakozó áram teljesítménye és munkája.

Legyen egy akármilyen áramkör, mely aktív és reaktív elemeket is tartalmaz. Kapcsoljunk az áramkörre:

$$u = U_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

alakú feszültséget. Az áramkörön futó áram alakja:

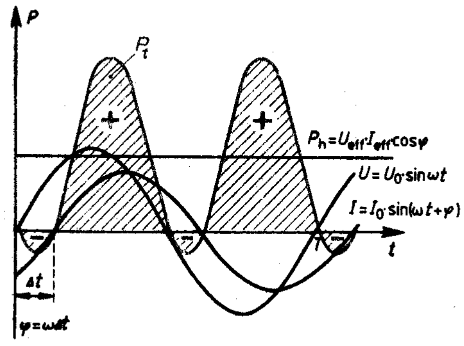
$$i = I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$$

Az áramkör pillanatnyi teljesítménye:

$$p = u \cdot i = U_{\max} \cdot I_{\max} \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

A trigonometriai szorzatokat összeggé alakítjuk, így:

$$p = U \cdot I \cdot \cos\varphi - U \cdot I \cdot \cos(2 \cdot \omega \cdot t - \varphi)$$



Tehát a pillanatnyi teljesítmény egy állandó függvény és egy cosinus függvény különbségeként írható fel.

Az ábra a feszültség, áramerősség, teljesítmény pillanatnyi értékeinek időbeli változását ábrázolja.

Vannak olyan időtartamok, amikor p>0, ez azt jelenti, hogy az áramkör energiát fogyaszt a feszültségforrástól, de vannak olyan esetek is, amikor p<0, ekkor az áramkör energiát ad a feszültségforrásnak, vagyis az áramkör feszültségforrásként, a feszültségforrás fogyasztóként viselkedik (szerepcsere). A pozitív energia részben hővé alakul (az aktív ellenállásokon), másrészt a tekercsek, és kondenzátorok mágneses valamint elektromos tereinek felépítésére fordítódik. A negatív energia úgy értelmezhető, hogy ekkor leépül a reaktív elemek elektromos, valamint mágneses

tere, így energia adódik át a feszültségforrásnak. Ha egy periódust veszünk alapul, akkor az összes cserélt energia pozitív (lásd a rajzon), tehát átlagosan véve az áramkör fogyasztóként viselkedik.
Az áramkör által egy periódus alatt elhasznált elektromos energia egyenlő a teljesítmény görbéje alatti területtel 0→T idők között. Ez a terület egyenlő annak a téglalapnak a területével melynek egyik oldala **T**, másik oldala $U \cdot I \cdot \cos\varphi$. Tehát: $W_{1\to T} = U \cdot I \cdot T \cdot \cos\varphi$. Ennek az energiának és az energia felvételhez szükséges időnek a hányadosát nevezzük **hatásos** (vagy aktív) **teljesítmény**nek.

$$P_h = \frac{W_{1\to T}}{T} = U \cdot I \cdot \cos\varphi, \ [P_h]_{SI} = 1W$$

A **cosφ** értéket nevezzük **teljesítménytényező**nek.
A látszólagos teljesítmény egyenlő az effektív feszültség és effektív áram szorzatával.

$$P_l = U \cdot I, \ [P_l]_{SI} = 1V \cdot A \text{(voltamper)}$$

$$\cos\varphi = \frac{P_h}{P_l}, \ P_h \le P_l$$

Az elektromos energiafelhasználás szempontjából kívánatos a feszültség és áramerősség fáziskülönbségének (**φ**) csökkentése. Ekkor változatlan **I** mellett növelhető a hasznosítható teljesítmény, másrészt csökken a hálózatot terhelő, a fogyasztó és a feszültségforrás között ide-oda áramló energia nagysága.
Váltakozó áramú áramkörök esetén meddő teljesítményről is beszélünk. Ez a reaktív elemek elektromos illetve mágneses tereinek felépítésére fordított majd visszakapott teljesítmény.

$$P_m = U \cdot I \cdot \sin\varphi, \ [P_m]_{SI} = 1V \cdot A \cdot R \text{ (voltamper reaktív)}$$

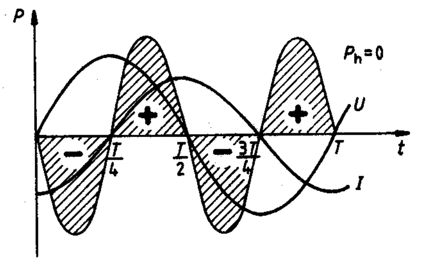
Ha az áramkör nem tartalmaz reaktív elemeket, akkor P_m=0, P_h=P_l mert cosφ=0.
A teljesítmények közötti összefüggés:

$$P_l^2 = P_m^2 + P_h^2$$

Ha egy ideális tekercset vagy kondenzátort kapcsolnánk szinuszos feszültségre, akkor mivel φ=±π/2, a hasznos teljesítmény nulla, miközben a látszólagos teljesítmény nem nulla.

$$P_l = P_m = U \cdot I.$$

Azt az energiát, amit a reaktív elem az egyik negyed periódusban felvesz, azt a következő negyed periódusban visszatáplálja a hálózatba. Ez azt jelentené, hogy ha egy ideális tekercset a konnektorba dugnánk azzal a céllal, hogy szinuszos mágneses teret keltsünk benne, nem forgatná a villanyóránkat, ugyanis a villanyóra az elhasznált hatásos (aktív) energiát regisztrálja. A grafikon a pillanatnyi



teljesítményt ábrázolja egy ideális reaktív elem esetén.

Egy RLC soros áramkör esetén:

$$P_l = U \cdot I = \frac{U^2}{Z} = I^2 \cdot Z$$

$$P_h = U_R \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U_R^2}{R}$$

$$P_m = (U_L - U_c) \cdot I = I^2 \cdot (x_L - x_C) = \frac{(U_L - U_c)^2}{(x_L - x_C)}$$

Ha az RLC kör rezonanciára van hangolva (φ=0), akkor:

$$P_m = 0$$

$$P_h = P_l = U \cdot I = \max imális$$

Érdekes eset az, amikor a soros kör csak egy ideális tekercset és egy ideális kondenzátort tartalmaz (nincs aktív ellenállás). Ilyenkor: Z=0, I→∞, φ=0, P_m=P_l=P_h=0. Tehát ez az áramkör nem használ energiát a feszültségforrástól miközben a körben nagyon nagy áram van jelen. Tehát nincs is szükség feszültségforrásra ahhoz, hogy a váltakozó áramot fent tartsuk a körben. Ilyenkor az történik, hogy a tekercs és a kondenzátor mágneses valamint elektromos terei egymást gerjesztik, vagyis az elektromos mező energiája fokozatosan a mágneses mező energiájává alakul és fordítva. Az áramkörben a szinuszosan változó áram mellett jelen van egy szinuszosan rezgő mágneses tér (a tekercs belsejében) és egy szinuszosan rezgő elektromos tér (a kondenzátor lemezei között). Az ilyen érdekes kört nevezzük ideális rezgőkörnek. A rezgőkört az elektromágneses rezgések létrehozásánál használják.