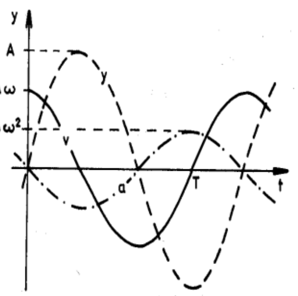
A harmonikus rezgőmozgás (emelt szint)

- A mozgás jellemzői: két szélső helyzet között végbemenő periodikus (időben ismétlődő) mozgás.
- Jellemző mennyiségek:
  - **T –** rezgésidő (periódusidő): egy teljes rezgés (a két szélső helyzet között oda-vissza) megtételéhez szükséges idő.
  - **f –** frekvencia (rezgésszám): időegységenként végbemenő rezgések száma **Hz (1/s)** –ben.
  - **ω -** körfrekvencia: időegységenként végbemenő rezgések száma szögben (radiánban). Mértékegysége **1/s.** Egy teljes rezgésnek megfelelő szög **2π** (radián).
  - **y** vagy **x –** kitérés: a rezgő tömegpont egyensúlyi helyzetétől (középhelyzet) a tárgy egy adott pillanati helyzetéig mért távolság. A kitérés lehet pozitív vagy negatív attól függően, hogy a rezgő pont a középhelyzet felett vagy alatt található az adott pillanatban. A kitérés idő függvényében változik.
  - **A –** amplitúdó (a rezgés tágassága): a legnagyobb kitérés. Ha egy rezgőmozgás csillapítatlan, akkor **A** időben állandó, ha a rezgés csillapított, akkor az amplitúdó időben csökken.
- A rezgőmozgás sebessége, gyorsulása időben változó.
- Ha a rezgés kitérése, sebessége, gyorsulása idő szerint ***sin*** vagy ***cos*** függvények , akkor a rezgőmozgás harmonikus. Ilyen mozgás például egy rugóra akasztott tárgy (rugalmas inga) rezgései, vagy a fonálinga lengései. Ha az amplitúdó időben állandó, akkor csillapítatlan harmonikus rezgésről vagy lineáris-harmonikus rezgésről beszélünk. Ez egy ideális eset. A rugalmas vagy fonál-inga mozgása lineáris-harmonikus lenne, ha semmiféle fékező hatás nem akadályozná az inga rezgéseit.



A kitérés–, sebesség– és gyorsulás–idő összefüggések egy grafikonon

- A mozgást leíró törvények:
  - A kitérés törvénye: $x = A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
  - A sebesség törvénye: $v = \omega \cdot A \cdot \cos(\omega \cdot t)$
  - A gyorsulás törvénye: $a = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega \cdot t)$
- Egyéb összefüggések: $\boldsymbol{v_{max}=\omega A}$ $\boldsymbol{a_{max}=\omega^2 A}$

  $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f$
- Ha kezdeti állapotában (***t=0*** pillanatban) a rezgő tömegpont nem az egyensúlyi helyzeten halad át pozitív irányban ($x=0$, $v=+\omega A$), akkor a mozgást leíró egyenletekben a **sin** és **cos** függvények változója (ωt)-ről ($\omega t+\varphi_0$)-ra módosul. φ_0 a rezgés kezdeti fázisa radiánban. Ha ***t=0*** pillanatban a rezgés kitérése x_0, akkor $x_0 = A \sin \varphi_0$.
- A rezgőmozgást leíró egyenleteket levezethetjük, ha egy egyenletes körmozgást végző tömegpontot egy a mozgás síkjába eső egyenes tengelyre vetítjük. A rezgő vetület amplitúdója megegyezik a körpálya sugarával, a körmozgás szögsebessége megadja a rezgések körfrekvenciáját.
  a rezgőmozgást leíró függvényeket a körmozgásból származtathatjuk.
  A megértést segítő animációt találhatunk a:

  http://ngsir.netfirms.com/englishhtm/SpringSHM.htm

  címen.
- Kis szögkitérésekkel lengő matematikai inga (fonálinga) lengésideje:

$$T = 2 \cdot \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

  ahol ***l*** a fonál hossza, ***g*** a gravitációs gyorsulás.

- **<u>Rugalmas típusú erő</u>:** A lineáris-harmonikus rezgőmozgás fenntartásához szükséges erő. Az erő mindig a rezgő tárgy kitérésével ellentétes irányú, de azzal egyenesen arányos. A lineáris-harmonikus rezgés kialakulásának dinamikai feltétele:

  $F = -D \cdot y$, ahol ***D*** a rugalmassági állandó (direkciós erő), ***y*** a kitérés.

  Pl: egy rugalmas inga esetében a rugó erejének és a gravitációs erőnek az eredője rugalmas típusú.

- **<u>Lineáris-harmonikus oszcillátor energiája:</u>** Ez a mozgás rugalmas erő hatására megy végbe, ez az erő konzervatív erő (mechanikai energiát „nem emésztő” erő), ezért a rezgő rendszer összes energiája időben állandó.

$$Em = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 - \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 \text{ (mozgási energia)}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) \text{ (helyzeti vagy potenciális energia)}$$

$$E = E_m + E_p = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2 = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 = \acute{a}lland\acute{o}$$

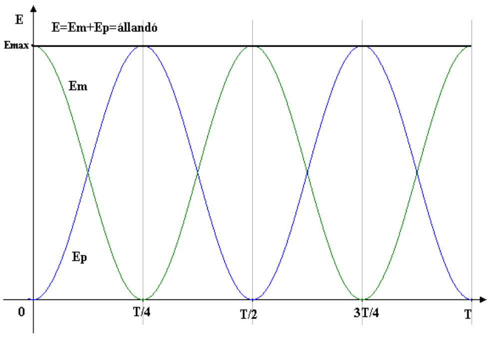
A rezgő test szélső helyzeteiben (y=±A): $E = E_p = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2, E_m = 0$

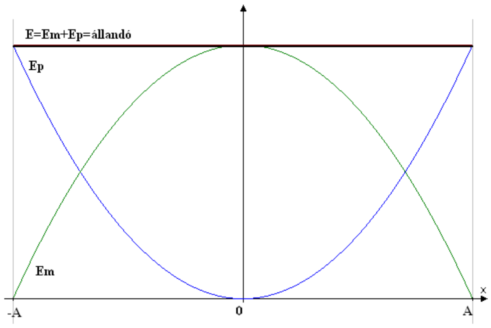
A rezgő test középhelyzetében (y=0): $E = E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{\max}^2, E_p = 0$

$$D = m \cdot \omega^2$$

$$T = 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}$$

Rezgések közben a rendszer potenciális energiája folyamatosan mozgási energiává alakul és fordítva. A két energiatípus összege a rezgő rendszer minden állapotában ugyanakkora.





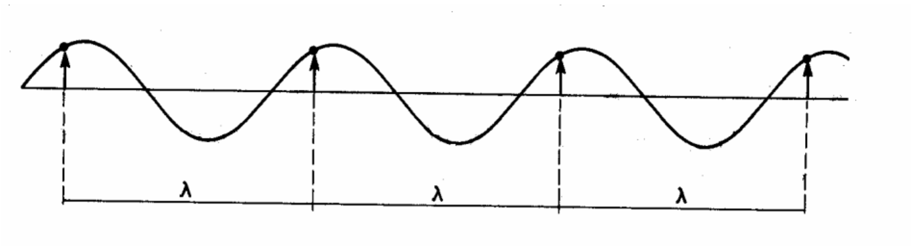
1. *A hullámmozgás (emelt szint)*

- Ha egy rugalmas közeg valamely pontjában egy zavart (perturbációt) keltünk, akkor ez a pont lendületet közvetít a közeg szomszédos pontjainak, melyek rendre továbbítják a mozgást. Egy idő után a közeg pontjainak egy része mozgásba jön. Azt is mondhatjuk, hogy a közeg pontjai mozgást és energiát továbbítanak szomszédjainak. Ezt a folyamatot nevezzük mechanikai hullámnak. A hullám egyszerűen megfogalmazva: egy rugalmas közegben terjedő rezgés. Ha a közeg egy pontja folyamatos rezgéseket végez (pl harmonikus rezgés) akkor a hullám folyamatosan terjed a közegben és a közeg minden pontja folyamatos rezgésben van. Például, ha egy kifeszített huzal egy végét folyamatosan le-fel mozgatjuk, akkor a huzalon egy hullám terjed végig melynek következményeként a huzal minden pontja egy idő után rezegni fog. Ha egy kavicsot ejtünk egy sima vízfelszínre, akkor a felületen lévő víz részecskék hullámzó mozgásba kezdenek. Ez a hullám koncentrikus körök formájában terjed. Ilyenkor felületi hullámról beszélünk.
- A hullámokat két féle kategóriába sorolhatjuk:
  Longitudinális hullámról beszélünk, ha a hullám terjedése közben a közeg részecskéi a hullám terjedési iránya mentén rezegnek. Pl: hang
  Transzverzális a hullám, ha a hullám terjedése közben a közeg részecskéi a hullám terjedési irányára merőlegesen rezegnek. Pl egy kifeszített huzalom terjedő hullám.
  Transzverzális hullám nem terjedhet gáznemű közegben a közeg részecskéi közötti gyenge kapcsolat miatt.

A továbbiakban olyan hullámról beszélünk mely esetében a rezgésforrás harmonikus oszcillátor, a rugalmas közegben pedig a hullám energiaveszteség nélkül terjed. Ez azt jelenti, hogy a közeg minden pontja azonos amplitúdóval és frekvenciával rezeg.

- A hullámokra jellemző mennyiségek:
  Amplitúdó (***A***), frekvencia (***f***), periódusidő (***T***), körfrekvencia (***ω***) melyek lényegében a rezgésforrás jellemzői.
  Hullámhossz (***λ***): a hullámot közvetítő rugalmas közeg két olyan szomszédos pontja közötti távolság melyek fázisban rezegnek. (azonos pillanatban haladnak át ugyanabban az irányban az egyensúlyi helyzeten, valamint szélső helyzeteken). Belátható, hogy a hullám egy periódusnyi idő alatt hullámhossznyi utat halad előre. Tehát:

$$\lambda = v \cdot T$$



ahol ***v*** a hullám terjedési sebessége, mely a rugalmas közeg tulajdonságaitól függ.

Longitudinális hullám esetén: $v = \sqrt{RT}$ ideális gázok esetén, $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ rugalmas rudakban

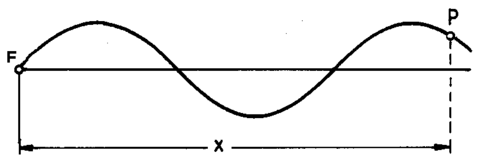
Transzverzális hullám esetén: $v = \sqrt{\frac{F \cdot l}{m}}$ kifeszített huzalban.

- A hullámegyenlet:

Ha a hullámforrás egy harmonikus oszcillátor (**F**) melynek rezgéstörvénye:

$$y_F = A \cdot \sin\omega \cdot t = A \cdot \sin 2 \cdot \pi \cdot \frac{t}{T}$$

akkor egy Fx irány mentén a rezgésforrástól **x** távolságra található **P** pont kitérése (**y**) az idő függvényében:



$$y_P = A \sin 2 \cdot \pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$$

az illető pont fáziseltérése a hullámforráshoz képest

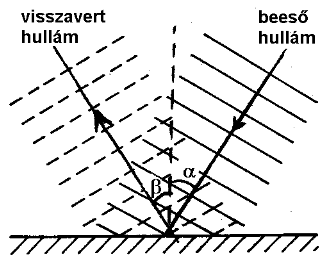
$$\varphi_0 = -\frac{2 \cdot \pi \cdot x}{\lambda}$$

- a közeg két pontjának fáziskülönbsége:

$\Delta\varphi = \frac{2 \cdot \pi \cdot |x_1 - x_2|}{\lambda} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \Delta x}{\lambda}$, ahol x_1 és x_2 a pontok távolsága a hullámkeltőtől, ***Δx*** a hullámok útkülönbsége.

- A hang egy longitudinális hullám mely levegőben kb. 340 m/s sebességgel terjed. Fémekben és folyadékokban a terjedési sebesség nagyobb. A hallható hangrezgések frekvenciatartománya 20Hz-20000Hz. A hang magasságát a frekvenciája adja meg, a hang erősségét a rezgések amplitúdója.

- **Hullámokkal kapcsolatos jelenségek:**

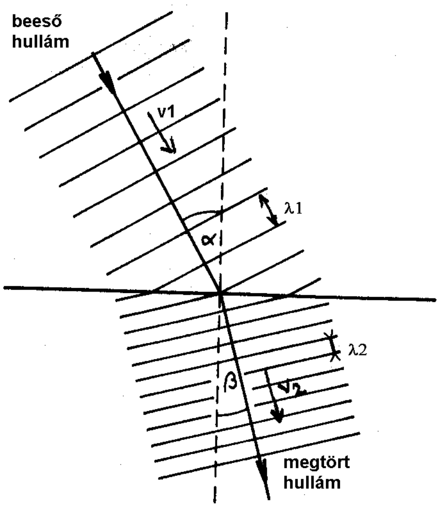


1. *Hullámvisszaverődés, hullámtörés:* ha egy hullám két különböző rugalmas közeg határfelületére érkezik, akkor egyrészt visszaverődik megváltoztatva terjedési irányát, másrészt, pedig átlépi a választófelületet megváltoztatva hullámhosszát (a terjedési sebesség változása miatt). Ilyenkor, ha a beeső hullám terjedési iránya nem merőleges a határfelületre, akkor megváltozik a terjedési iránya is. Ha a második közeg rugalmas szempontból sűrűbb, mint az első ($v_2<v_1$) akkor a hullám a „merőlegeshez törik", ellenkező esetben ($v_2>v_1$) a „merőlegestől törik". Ennél a második esetnél túl nagy beesési szög esetén megtörténhet, hogy a hullám már nem lépi át a határfelületet,

tehát a törés jelensége nem lép fel. Ilyenkor teljes visszaverődésről beszélünk. A határszög (α_H) az a legnagyobb beesési szög melynél a hullám még átlépi a választófelületet. Ha $\alpha > \alpha_H$ a törés megszűnik.
A visszaverődés törvénye: visszaverődési szög =beesési szög ***(α=β)***

A törés törvénye (Snellius-Descartes): $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ ahol ***β*** a törési szög.

A határszög: $\alpha_H = \sin^{-1}(\frac{v_1}{v_2}) = \sin^{-1}(\frac{\lambda_1}{\lambda_2})$



2. *Hulláminterferencia (összetevődés):* Ha egy rugalmas közeg egy pontjába egyidejűleg két vagy több hullám (rezgés) érkezik akkor ezek összetevődnek. Lényegében ilyenkor két vagy több rezgőmozgás összetevődéséről van szó. Két vagy több rezgés összetevődésekor a kitéréseket, sebességeket, gyorsulásokat vektorként adjuk össze. Ha az illető pontba két harmonikus rezgés érkezik, melyeknek frekvenciája és rezgésiránya megegyezik:

$y_1 = A_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ és $y_2 = A_2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_{02})$

akkor a keletkező rezgés egyenlete:

$y = \sum y = A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0)$ ahol

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \cos\varphi_{02}}$$

$$\varphi_0 = \mathrm{tg}^{-1}(\frac{A_2 \cdot \sin\varphi_{02}}{A_1 + A_2 \cdot \cos\varphi_{02}})$$

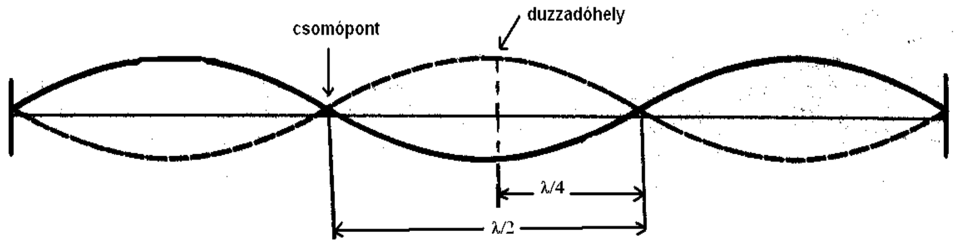
Észrevehető, hogy a két rezgés maximálisan erősíti egymást ***(A=max),*** ha ***φ₀₂=2kπ***, ami azt jelenti, hogy az összetevődő két rezgés fázisban van, tehát a fáziskülönbségük ***Δφ=2kπ (k∈Z).*** A két rezgés gyengíti egymást ***(A=min)*** ha ***φ₀₂=Δφ=(2k+1)π (k∈Z).*** Ha az összetevődő két hullámra gondolunk, akkor az eredő amplitúdó a lehető legnagyobb, vagyis interferencia maximumról (erősítés) beszélünk, ha az összetevődő hullámok útkülönbsége

$\Delta x = \frac{\lambda \cdot \Delta\varphi}{2 \cdot \pi} = k \cdot \lambda = 2 \cdot k \cdot \frac{\lambda}{2}$. (félhullámhossz páratlan számú többszöröse)

Interferencia minimumról (gyengítés) beszélünk, ha

$$\Delta x = (2 \cdot k + 1) \cdot \lambda = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

Az interferencia egy érdekes esetét figyelhetjük meg, ha egy hullám visszaverő felület felé terjed és az onnan visszaverődő hullám összetevődik a direkt hullámmal. Ilyenkor állóhullám keletkezik, ami annyit



jelent, hogy a közeg pontjainak amplitúdója időben állandó, az amplitúdó mértéke a pont helyzetétől függ. Vannak olyan pontok melyek maximális amplitúdóval rezegnek (duzzadóhelyek) és vannak olyan pontok melyek nem rezegnek tehát A=0 (csomópontok). Ilyen jelenség figyelhető meg egy kifeszített húron melynek egyik vége harmonikus rezgéseket végez, másik vége rögzített.
Ugyancsak állóhullámok keletkeznek egy megpendített gitárhúron, vagy egy megfújt sípban is.
Egy rögzített végű húron vagy lemezen akkor alakulnak ki állóhullámok, ha a húr hossza

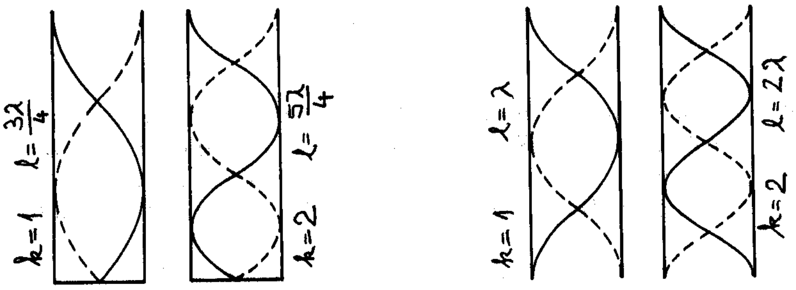
$l = k \cdot \frac{\lambda}{2}$ ahol ***k*** természetes szám.

Két szomszédos duzzadóhely távolsága $\frac{\lambda}{2}$, egy duzzadóhely és a szomszédos csomópont távolsága $\frac{\lambda}{4}$.

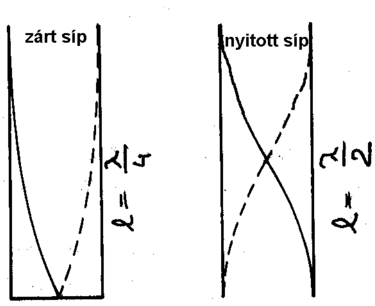
Egy megpendített gitárhúron több állóhullám is megjelenik. Ezek frekvenciája:

$$f_k = \frac{(k+1)\cdot v}{2\cdot l}$$, ***k=0*** alaphang***, k>0 k***-ad rendű felharmonikusok.

Megpendített húr esetén az alaphang erőssége (rezgések amplitúdója) a legnagyobb, a felharmonikusoké kisebb. Az alaphang és felharmonikusok együttese adja meg a hangszínt, azért színes a húr által kibocsátott hang, mert egyszerre több hangot hallunk.
Ugyanez az összefüggés érvényes mindkét végén nyitott gázoszlopban (nyitott síp) kialakuló hang állóhullámokra is.



Felhangok zárt és nyitott sípokon



Alaphang zárt és nyitott sípokon

Ha a gázoszlop egyik végén nyitott, másik végén zárt (zárt síp) akkor:

$$f_k = \frac{(2\cdot k+1)\cdot v}{4\cdot l}$$, ***k=0*** alaphang, ***k>0 k***-ad rendű felharmonikusok.