

Merev test egyensúlyának vizsgálata



Digitális tananyag
a fizika tanításához

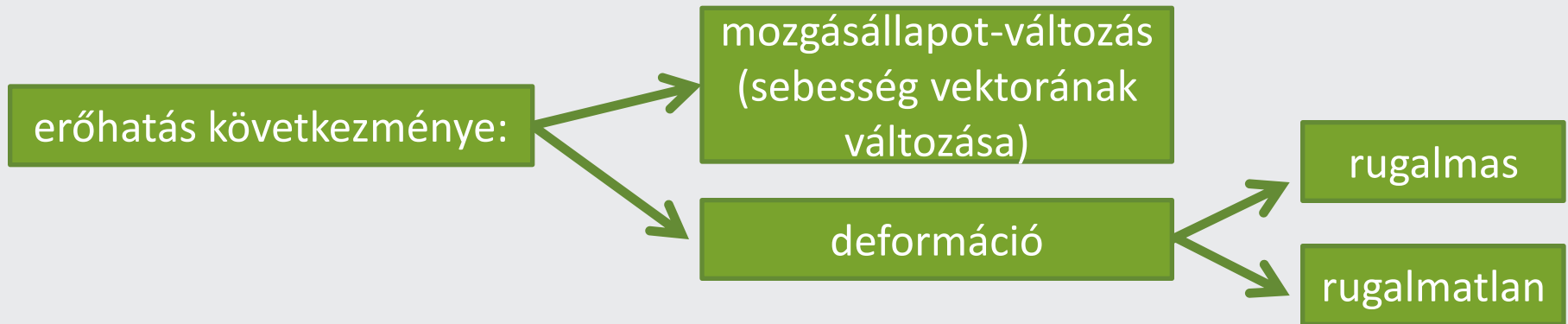


Ismétlés

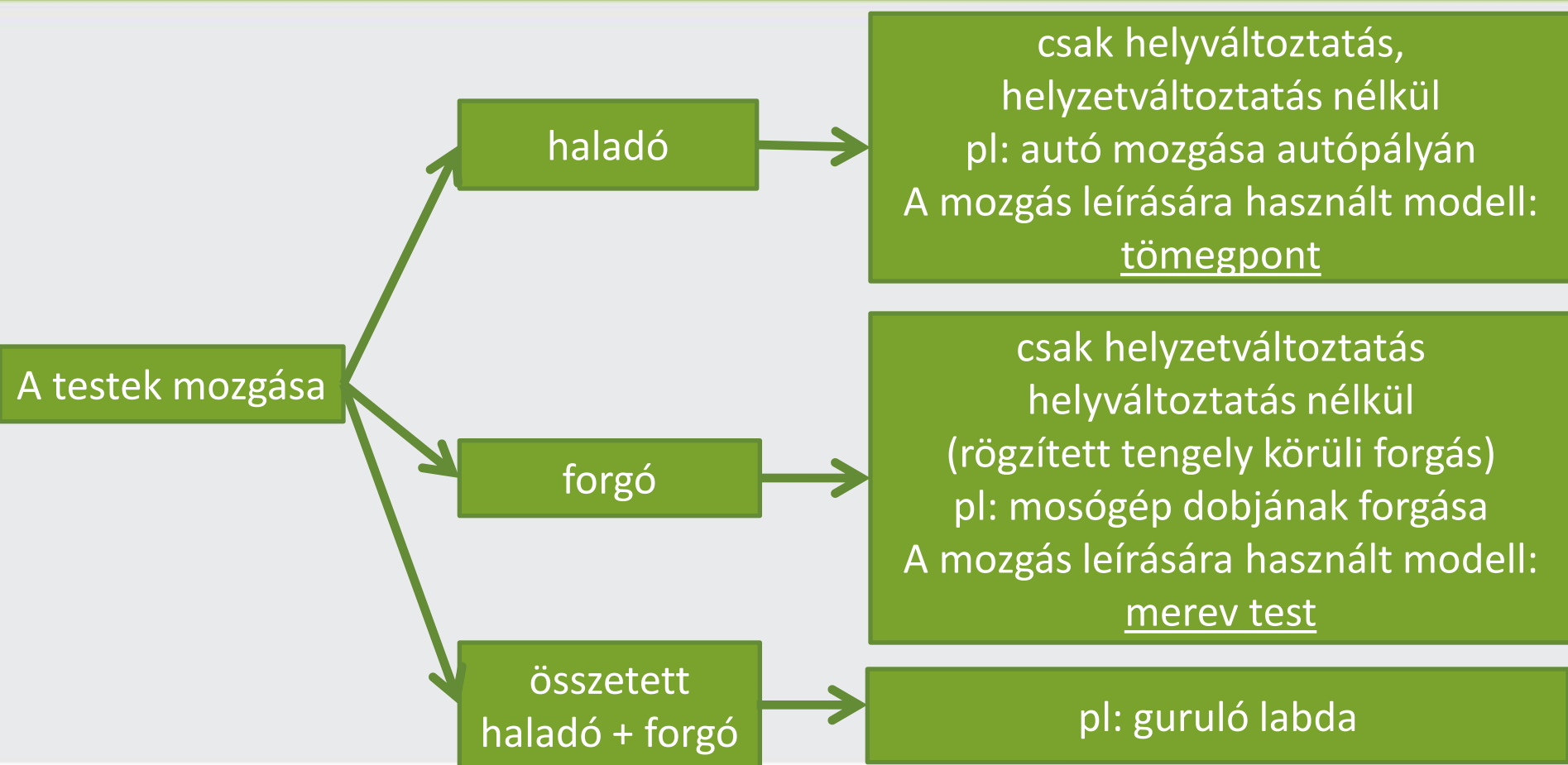
Erőhatás – a testek mechanikai kölcsönhatásának mértékét és irányát megadó vektormennyiség.

jele: \vec{F}

mértékegysége: 1 newton: $1N = 1kg \cdot \frac{m}{s^2}$



Ismétlés



Erőnyomaték

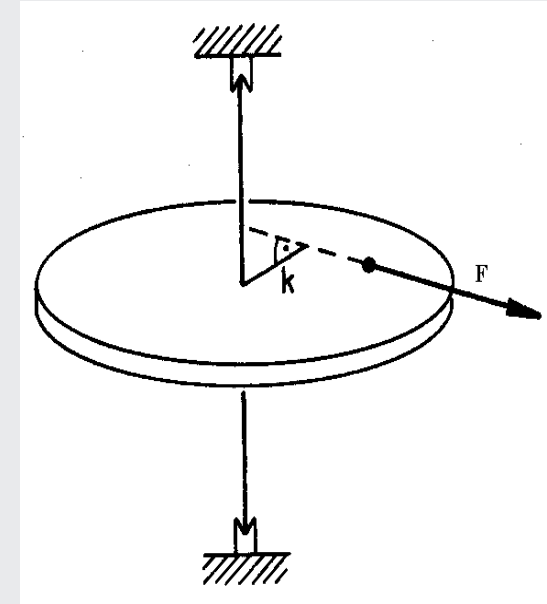
Az erőnyomaték egy olyan fizikai mennyiség mely egy erő forgatóhatását adja meg egy ponthoz vagy forgástengelyhez vonatkoztatva.

Az erőnyomaték:

- az erő nagyságától és
- az erő hatásvonalának a forgástengelytől mért távolságától függ. Ezt nevezzük erőkarnek (k).

$$M_F = F \cdot k \quad [M_F] = 1N \cdot m$$

Ha az erők hatásvonalai a tengelyre merőleges síkban vannak a nyomaték iránya megegyezik az erő forgatóhatásának irányával a forgástengelyhez viszonyítva.



Merev test egyensúlya

Egy merev test egyensúlyban van, ha egyidejűleg:

- haladási és
- forgási

egyensúlyban van.

haladási egyensúly: a test nem halad (nyugalomban van) vagy egyenes vonalban egyenletesen halad.

forgási egyensúly: a merev test nem forog semmilyen tengely körül, vagy egyenletes forgásban van.

Egyensúlyi feltételek

haladási egyensúly feltétele: $\sum \vec{F} = 0$

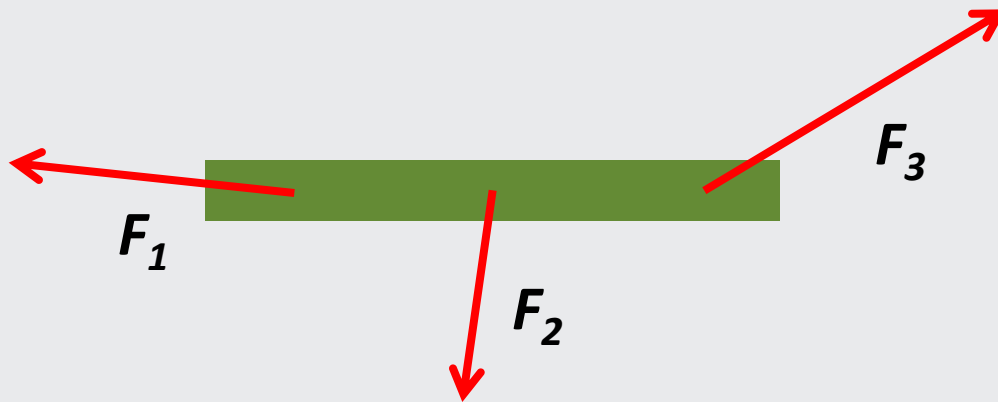
A testre ható erők vektori összege zérus, avagy a testre ható erők kiegyenlítik egymást.

forgási egyensúly feltétele: $\sum \vec{M} = 0$

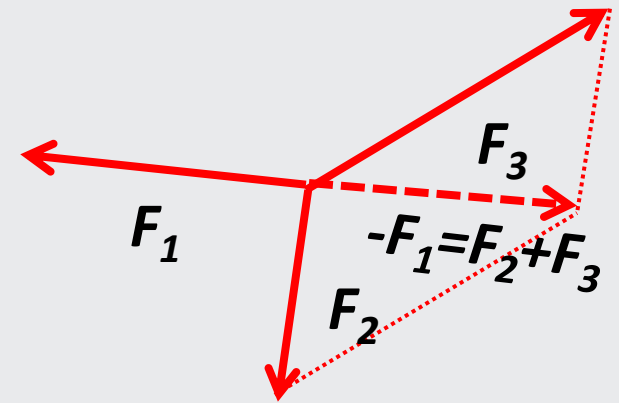
A testre ható erők nyomatékainak vektori összege bármely ponthoz viszonyítva zérus, avagy a testre ható erők forgatónyomatékai kiegyenlítik egymást.

Haladási egyensúly vizsgálata

A középiskolában csak olyan erőrendszereket vizsgálunk melyeknek hatásvonalai egy síkban vannak, és ez a sík a forgástengelyre merőleges.

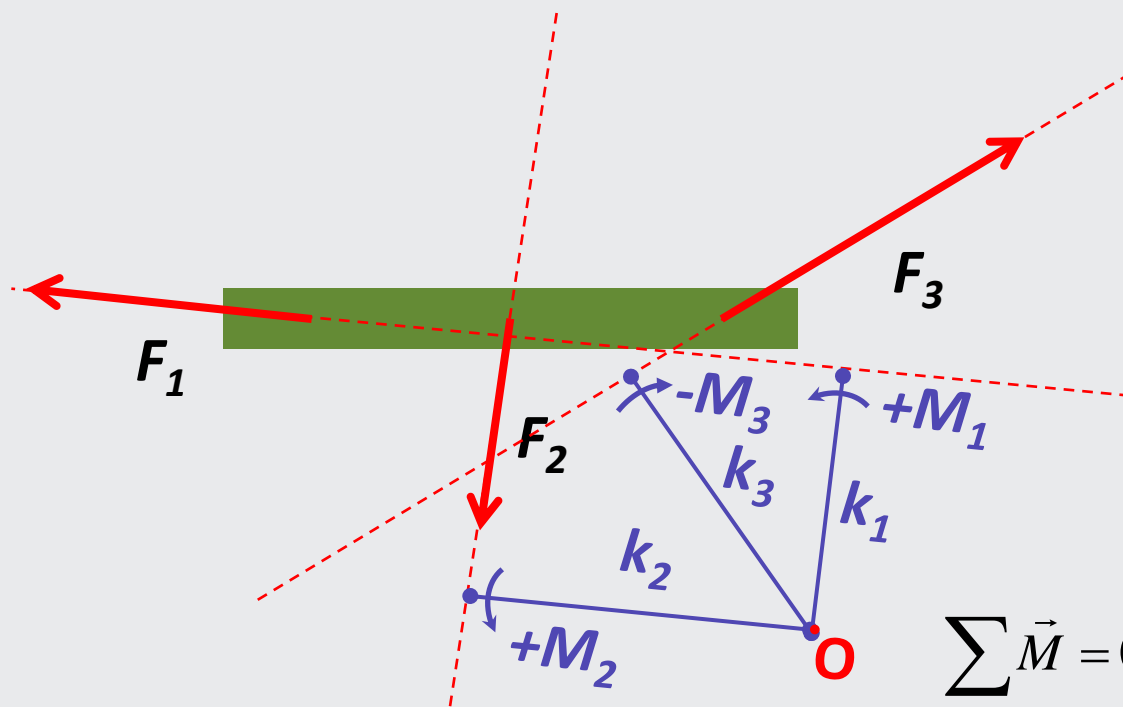


Az erővektorokat egy pontba csúsztatva megvizsgáljuk az egyensúlyi feltételt.



$$\sum \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$$

Forgási egyensúly vizsgálata



1. Önkényesen választunk egy forgásközéppontot (tengelyt)
2. Megszerkesztjük az erőkarokat, felismerjük a nyomatékok irányát/előjelét.
3. Ellenőrizzük a forgási egyensúly feltételét:

$$\sum \vec{M} = 0 \quad +M_1 + M_2 - M_3 = 0$$
$$+F_1 \cdot k_1 + F_2 \cdot k_2 - F_3 \cdot k_3 = 0$$

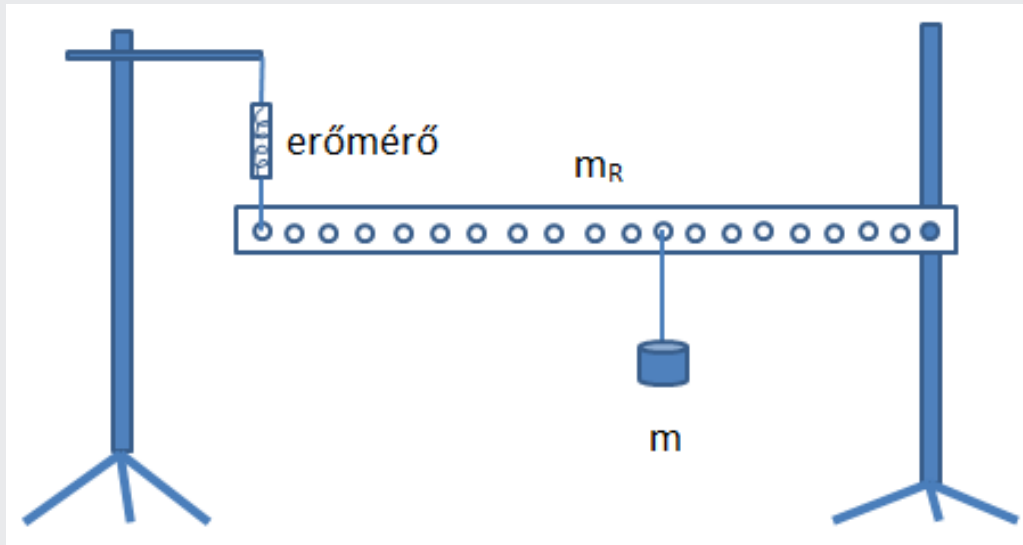
Összefoglaló

- Egy merev test egyensúlyban van, ha egyidejűleg mindkét feltétel teljesül.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \sum \vec{M} = 0$$

- Az egyensúlyi feltételek felírásakor annyi matematikai egyenlethez jutunk ahány ismeretlenes a probléma.
- A forgásközéppontot/tengelyt célszerű úgy megválasztani, hogy egy ismeretlen nagyságú erővektor nyomatéka a választott pontra vonatkoztatva nulla legyen.

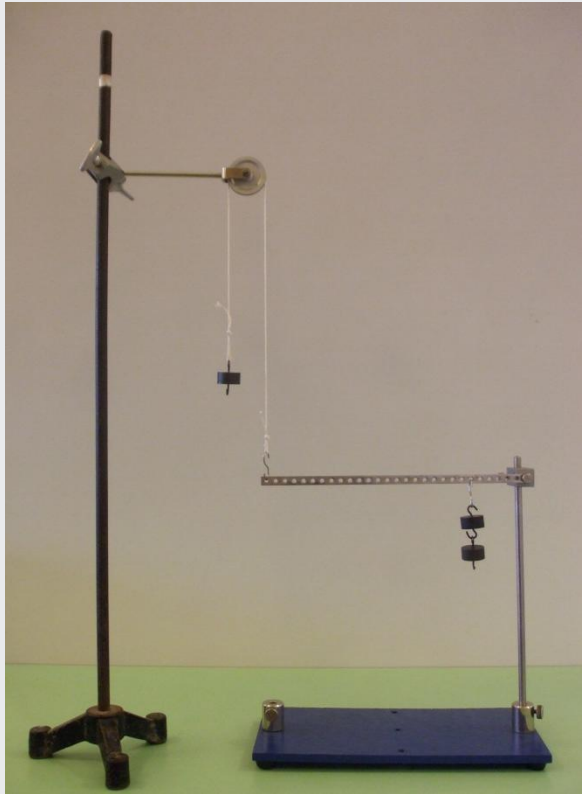
Méréssel kapcsolt 1. számpélda



- Állítsuk össze az ábrán látható elrendezést.
- A centiméterenként lukakkal ellátott lemezt a mechanikai készletben megtaláljuk.
- Használjuk a súlysorozat tömegeit ($m=50\text{g}$).
- Digitális konyhamérleggel mérjük meg a lemez tömegét (m_R).

Feladat: Számítsuk ki a lemez felfüggesztéseinél ható erőket! A szükséges távolságokat leolvashatjuk a lukazott lemezről. Az erőmérőt leolvasva ellenőrizzük az eredményt!

Méréssel kapcsolt 1. számpélda

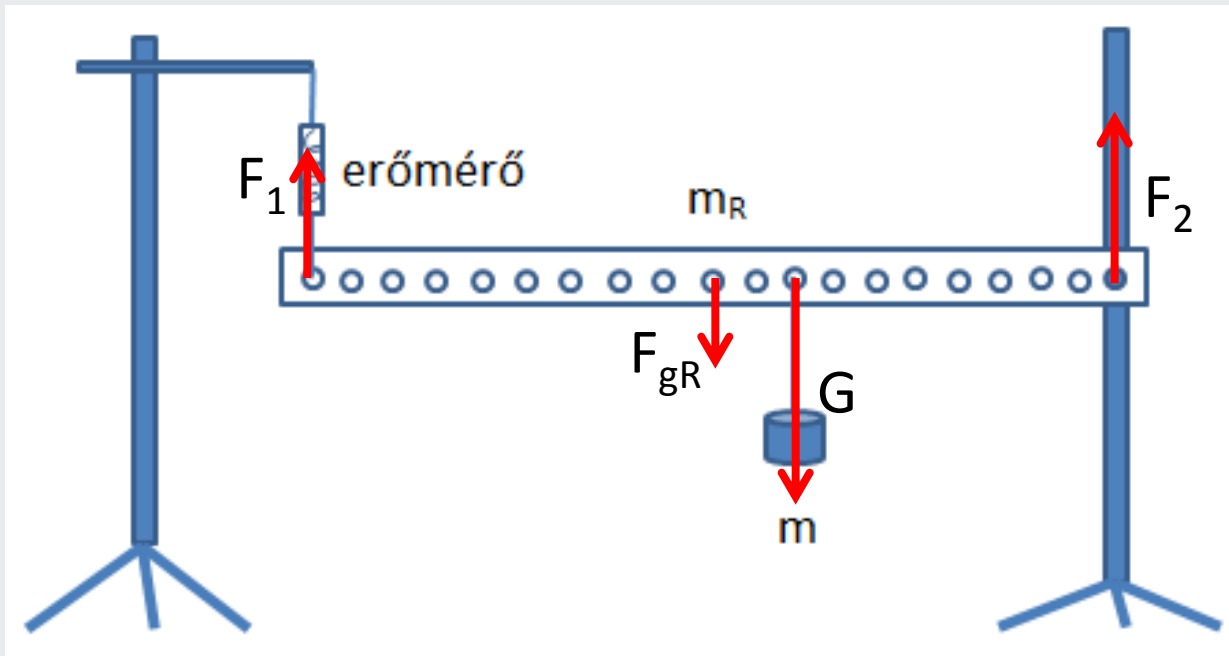


Az elrendezés
összeállítása
(lehetőségek)



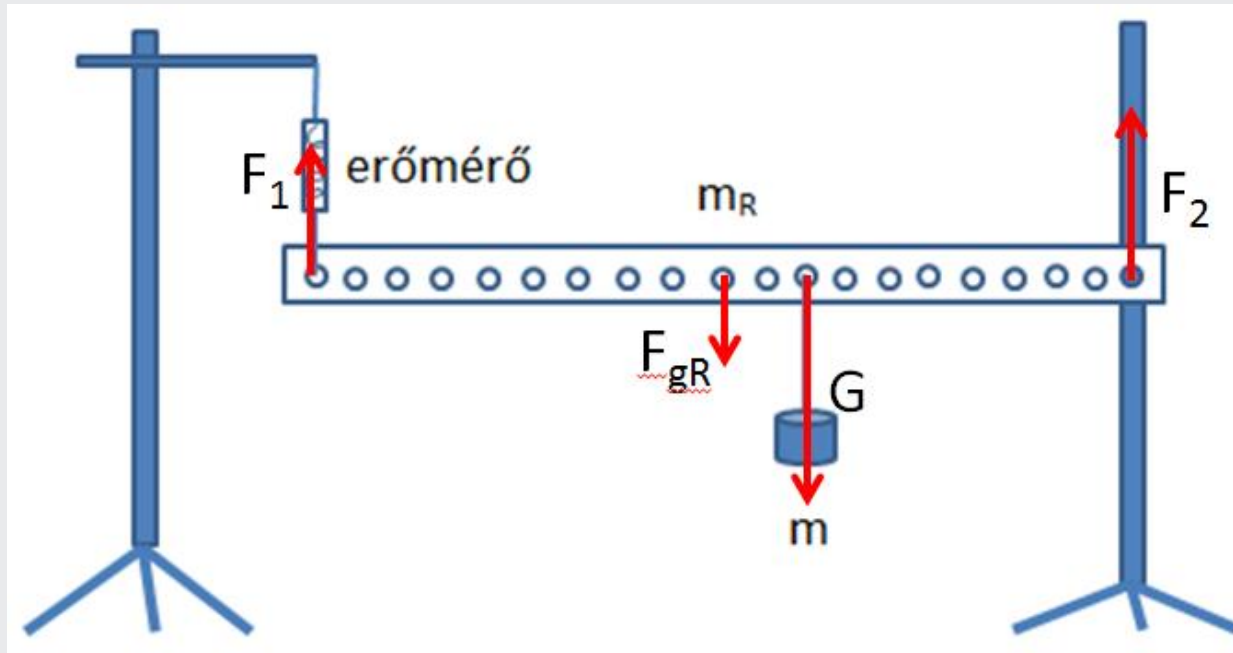
1. Számpélda megoldás

1. Felismerjük és berajzoljuk a vízszintes lemezre ható erővektorokat.



1. Számpélda megoldás

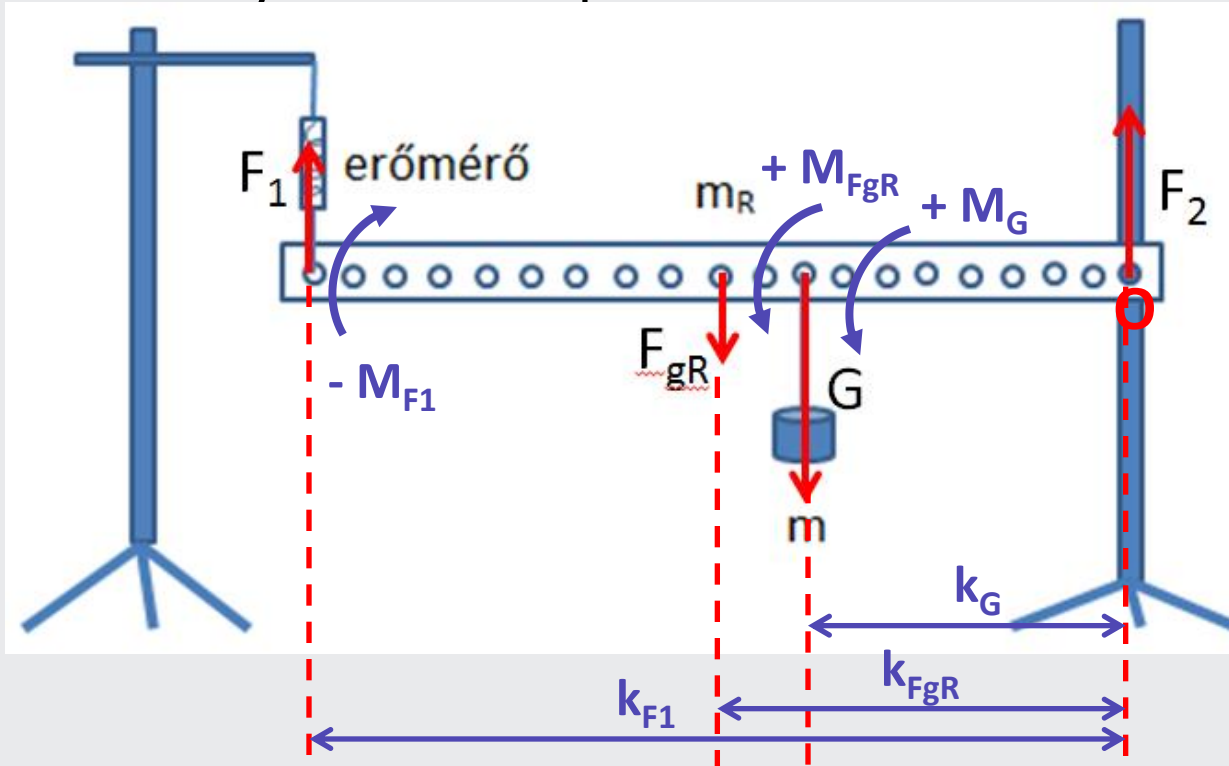
2. Felírjuk a haladási egyensúlyra vonatkozó feltételt.



$$+F_1 + F_2 - F_{gR} - G = 0 \quad (\text{ismeretlenek: } F_1 \text{ és } F_2)$$

1. Számpélda megoldás

3. Felírjuk a forgási egyensúlyra vonatkozó feltételt.
Viszonyítsunk az O ponthoz!



$$+M_G + M_{F_{gR}} - M_{F_1} = 0$$

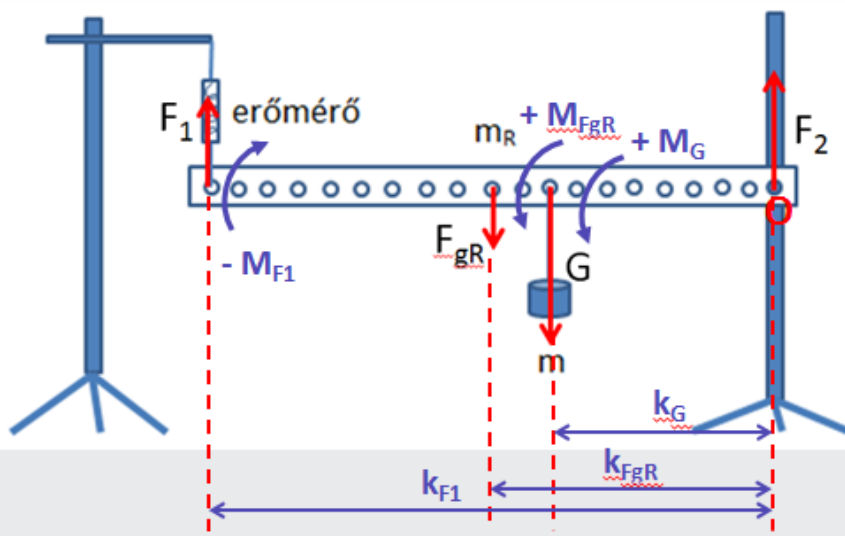
$$M_G = G \cdot k_G = m \cdot g \cdot k_G$$

$$M_{F_{gR}} = m_R \cdot g \cdot k_{F_{gR}}$$

$$M_{F_1} = F_1 \cdot k_{F_1}$$

1. Számpélda megoldás

4. Megoldjuk az egyenletrendszert!



$$+F_1 + F_2 - m_R \cdot g - m \cdot g = 0$$

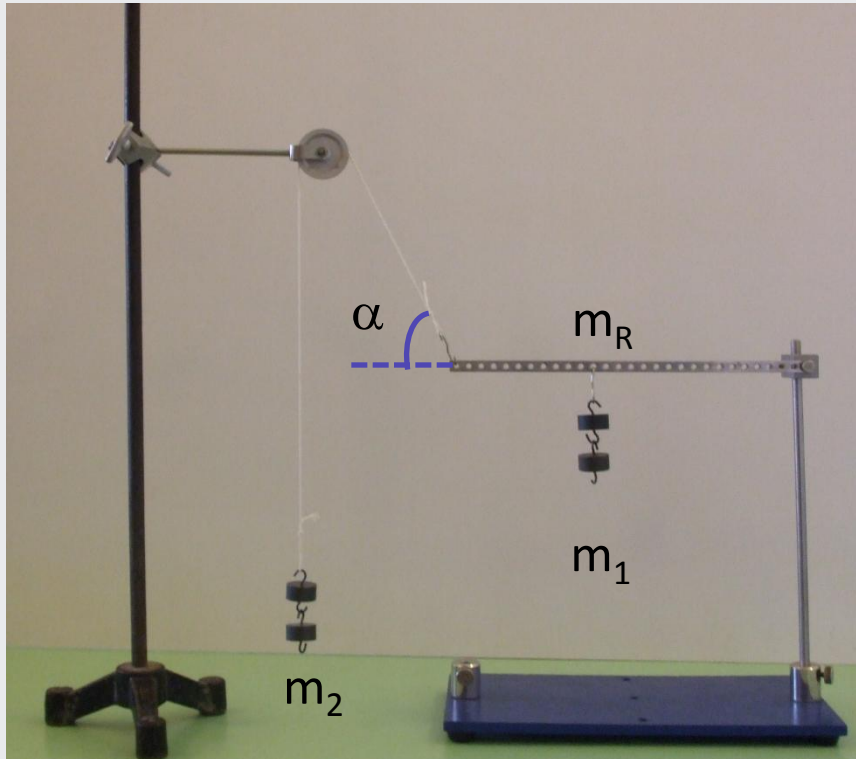
$$+m \cdot g \cdot k_G + m_R \cdot g \cdot k_{F_{gR}} - F_1 \cdot k_{F_1} = 0$$



$$F_1 = \frac{g(m \cdot k_G + m_R \cdot k_{F_{gR}})}{k_{F_1}}$$

$$+F_1 + F_2 - m_R \cdot g - m \cdot g = 0 \Rightarrow F_2 = (m_R + m) \cdot g - F_1$$

Méréssel kapcsolt 2. számpélda



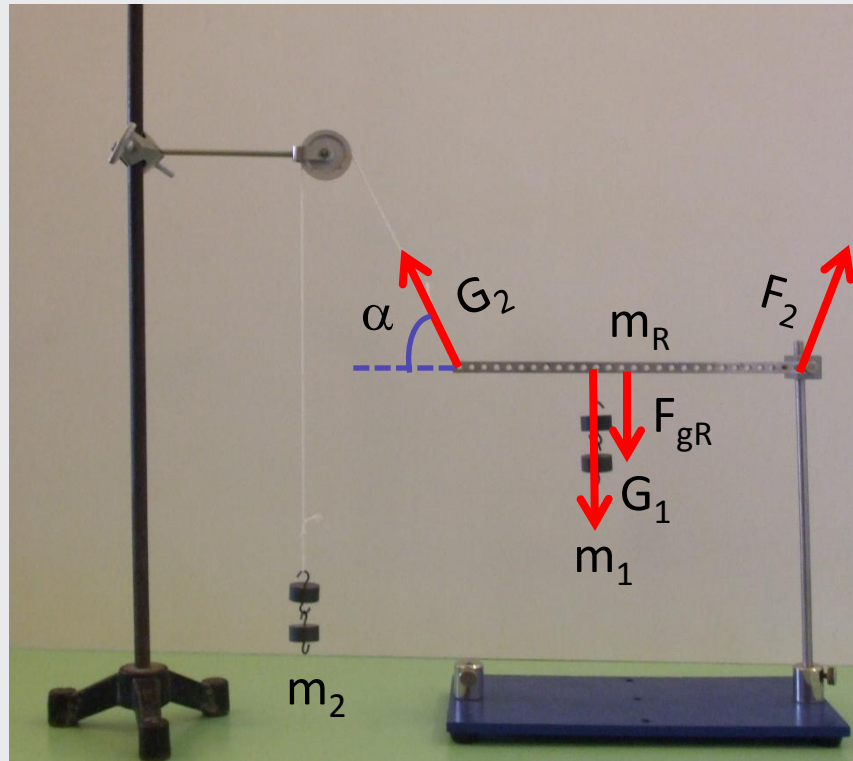
- Állítsuk össze az ábrán látható elrendezést.
- A centiméterenként lukakkal ellátott lemezt, valamint az állócsigát a mechanikai készletben megtaláljuk.
- Használjuk a súlysorozat tömegeit ($m=50\text{g}$).
- Digitális konyhamérleggel mérjük meg a lemez tömegét (m_R).

Feladat:

Megmérve m_1 , m_R tömegeket, az α szöget, valamint a lukazott lemezről leolvassva a szükséges távolságokat számoljuk ki az egyensúly fenntartásához szükséges m_2 -et valamint adjuk meg a lemez jobboldali végét tartó erő nagyságát és irányát!

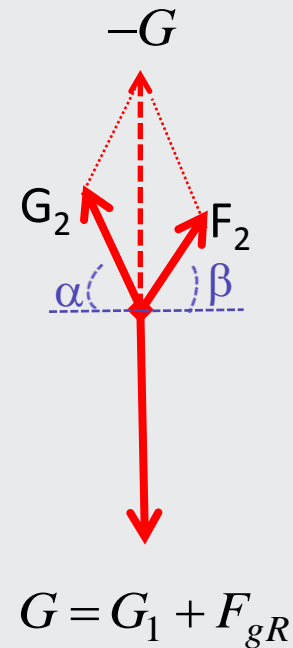
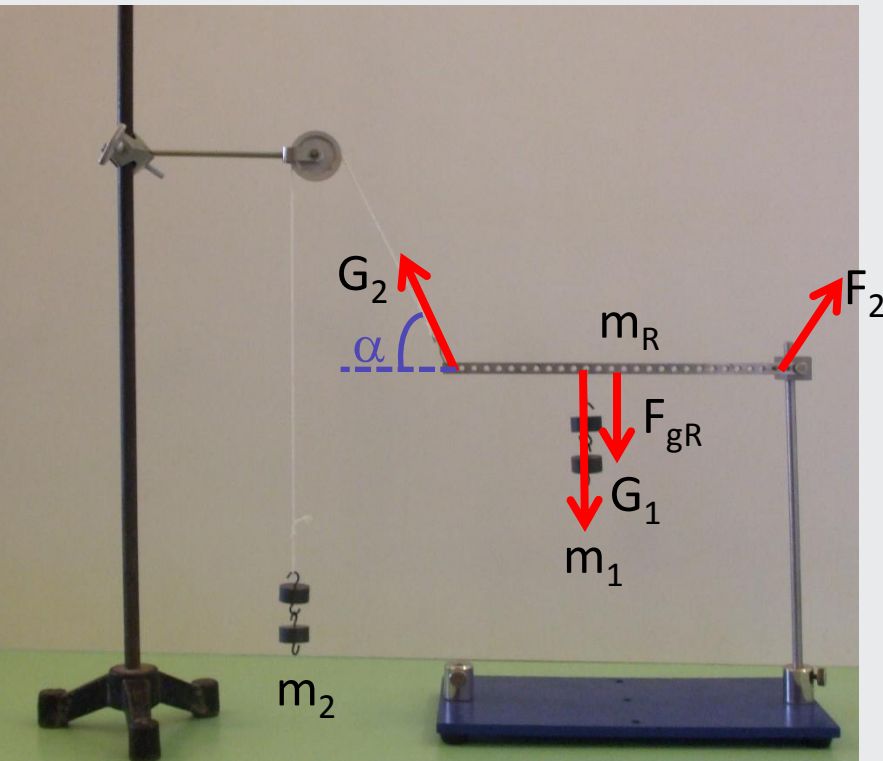
2. Számpélda megoldás

1. Felismerjük és berajzoljuk a vízszintes lemezre ható erővektorokat.



2. Számpélda megoldás

2. Megvizsgáljuk az erővektorok kiegyenlítődségét.



2. Számpélda megoldás

2. Felírjuk az erővektorok egyensúlyára vonatkozó skalár összefüggéseket. Az erővektorokat összetevőkre bonjuk (G_{2x} , G_{2y} , F_{2x} , F_{2y}).

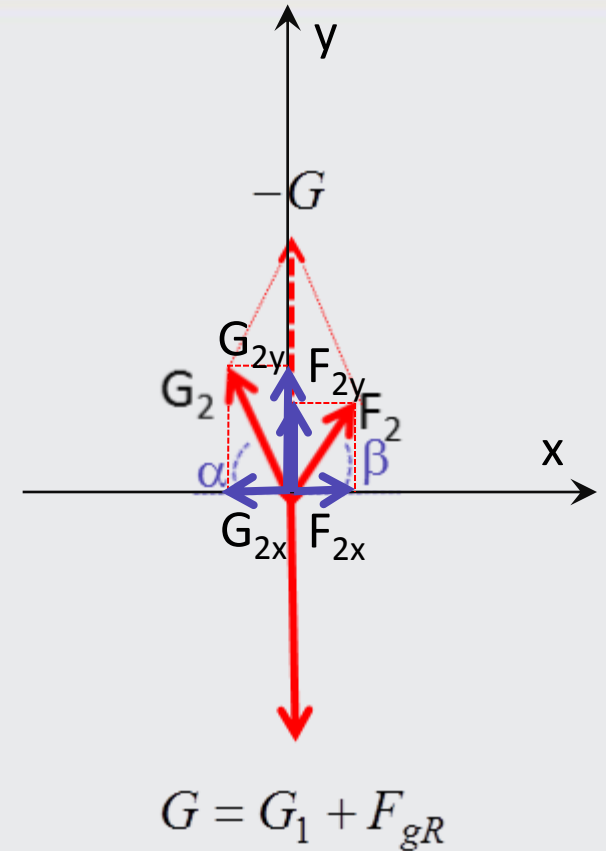
$$\text{Ox tengely: } +F_{2x} - G_{2x} = 0$$

$$\text{Oy tengely: } +F_{2y} + G_{2y} - G = 0$$

Felírva az erő összetevőket a következő egyenletrendszerhez jutunk:

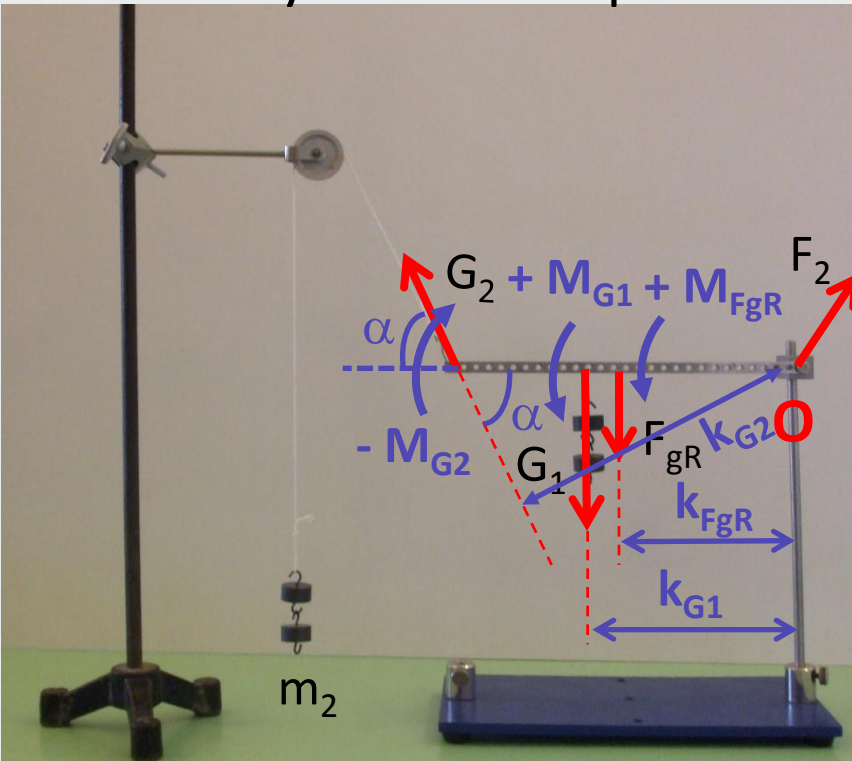
$$\begin{cases} F_2 \cdot \cos \beta - m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \\ F_2 \cdot \sin \beta + m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha - g \cdot (m_1 + m_R) = 0 \end{cases}$$

Ismeretlenek: F_2 , m_2 , β



2. Számpélda megoldás

3. Felírjuk a forgási egyensúlyra vonatkozó feltételt.
Viszonyítunk az O ponthoz!



$$+M_{FgR} + M_{G1} - M_{G2} = 0 \implies$$

$$+m_R \cdot g \cdot k_{FgR} + m_1 \cdot g \cdot k_{G1} - m_2 \cdot g \cdot k_{G2} = 0$$

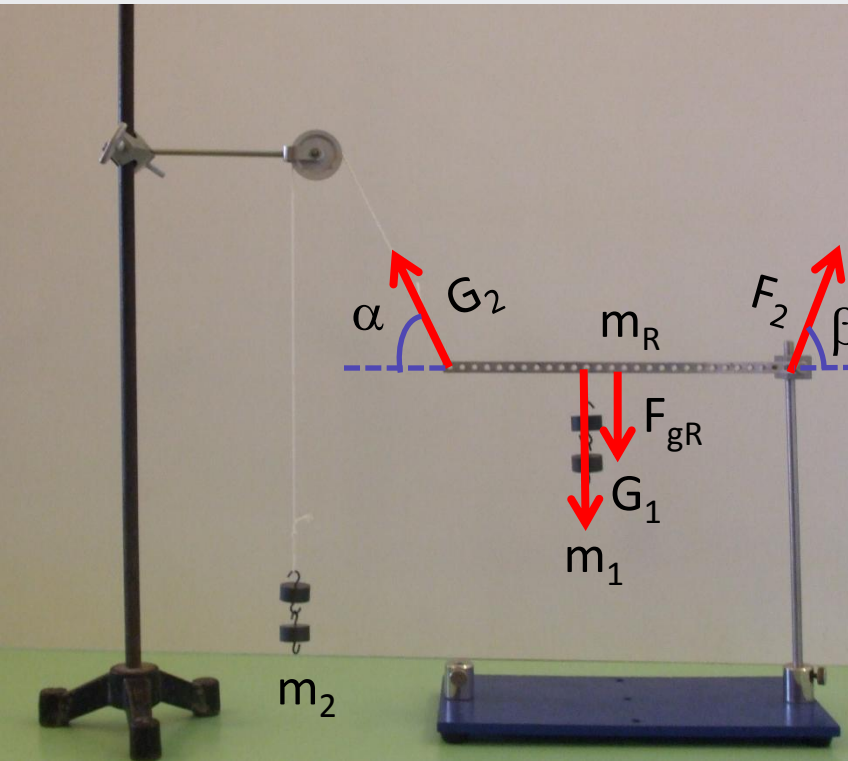
k_{G1} - a lukazott lemeztől leolvasható

$$k_{FgR} = \frac{l}{2} \quad l - \text{a lemez hossza}$$

$$k_{G2} = l \cdot \sin \alpha$$

2. Számpélda megoldás

4.A megoldáshoz vezető egyenletrendszer tehát:



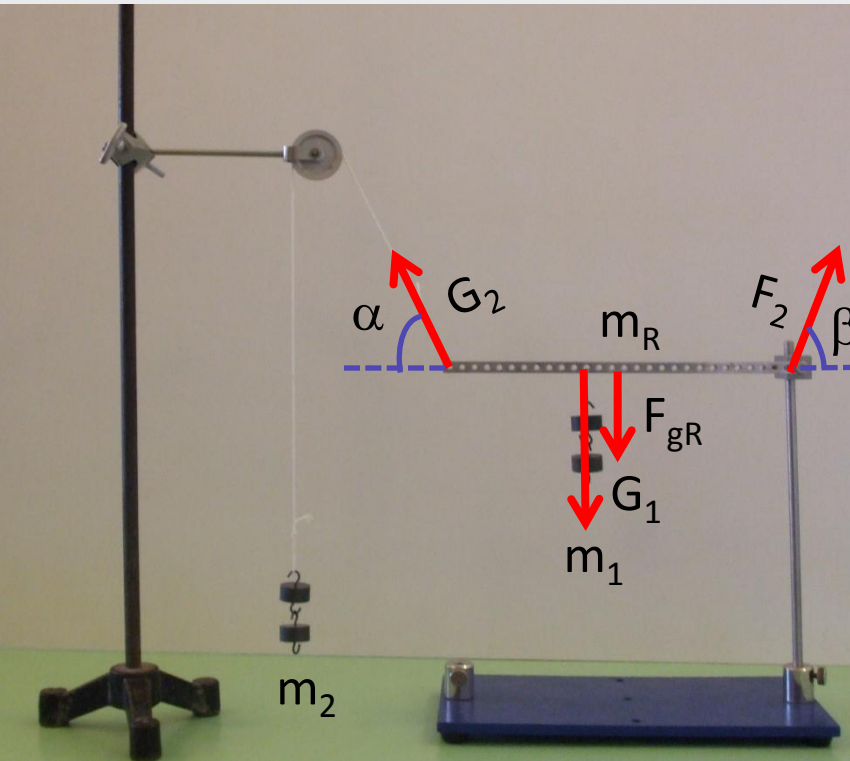
$$\begin{cases} F_2 \cdot \cos \beta - m_2 \cdot g \cdot \cos \alpha = 0 \\ F_2 \cdot \sin \beta + m_2 \cdot g \cdot \sin \alpha - g \cdot (m_1 + m_R) = 0 \\ m_R \cdot \frac{l}{2} + m_1 \cdot k_{G1} - m_2 \cdot l \cdot \sin \alpha = 0 \end{cases}$$

Az utolsó egyenletből m_2 kiszámítható.

Az első egyenletből kifejezve F_2 -t és behelyettesítve a második egyenletbe β kiszámítható.

Visszatérve az első egyenlethez F_2 kiszámítható.

2. Számpélda megoldás

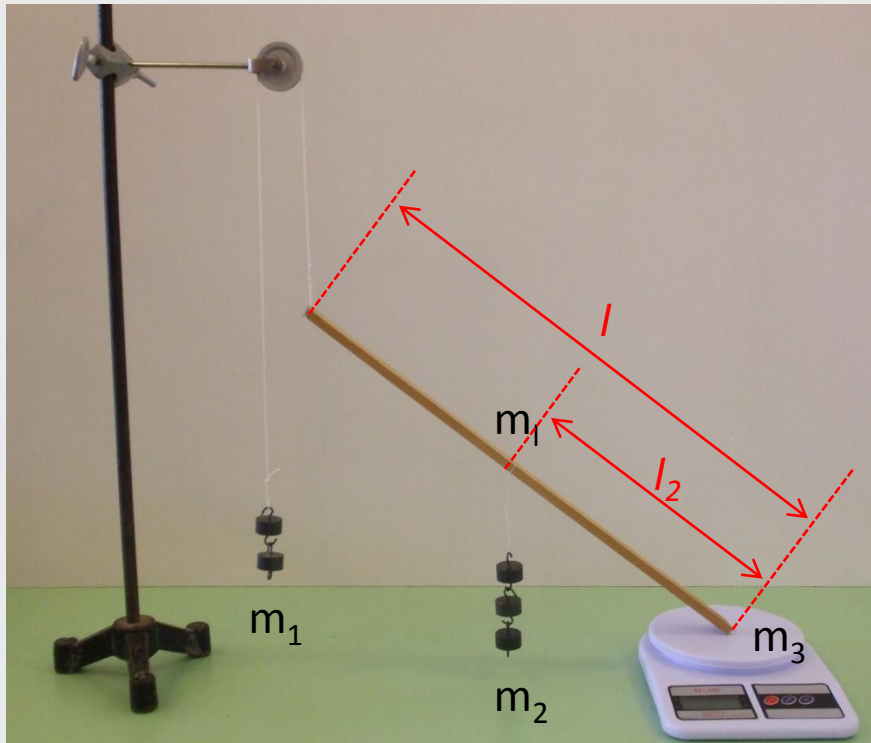


5.A megoldások:

$$m_2 = \frac{m_R}{2 \cdot \sin \alpha} + \frac{m_1 \cdot k_{G1}}{l \cdot \sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{m_1 + m_R}{m_2 \cdot \cos \alpha} - \operatorname{tg} \alpha$$

Méréssel kapcsolt 3. számpélda



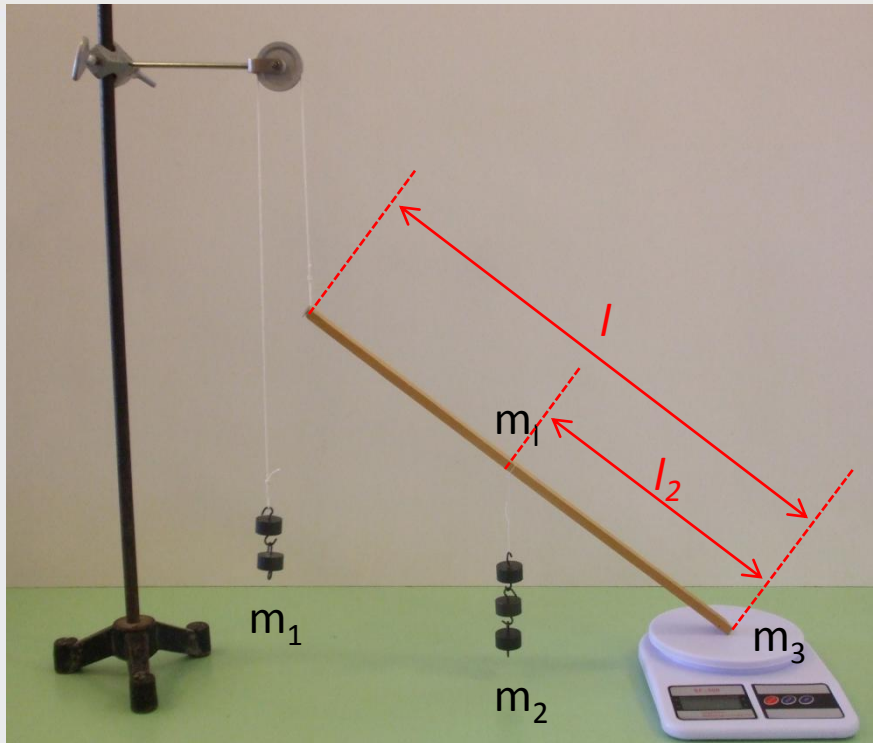
- Állítsuk össze az ábrán látható elrendezést.
- Használjuk a súlysorozat tömegeit ($m=50\text{g}$).
- Mérjük meg l_1 , l_2 távolságokat valamint olvassuk le az m_1 és m_2 tömegeket.

Feladat:

Megvizsgálva a rendszer egyensúlyát és felírva az egyensúlyi feltételekből származó egyenleteket határozzuk meg a lécc tömegét (m_l) valamint azt, hogy mekkora tömeget mutat a digitális mérleg (m_3).

Méréssel ellenőrizzük a számítások eredményét.

Méréssel kapcsolt 3. számpélda

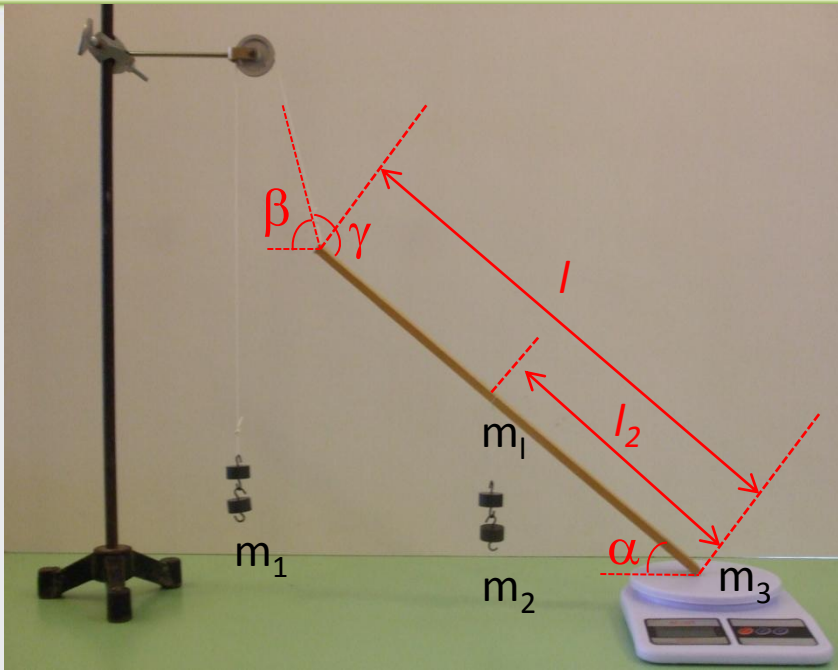


Eredmények:

$$m_1 = \frac{l \cdot (2 \cdot m_1 - m_2)}{2 \cdot l_2}$$

$$m_3 = m_1 + m_2 - m_1$$

Méréssel kapcsolt 4. számpélda



- Állítsuk össze az ábrán látható elrendezést.
- Használjuk a súlysorozat tömegeit ($m=50\text{g}$).
- Mérjük meg l , l_2 távolságokat, olvassuk le az m_1 és m_2 tömegeket, valamint szögmérő segítségével mérjük meg az α , β szögeket. (célszerű a γ szöget megmérni, majd α és γ -ból következtetni β -ra)
- A digitális mérleg felületére ragasszunk tapadó felületű szalagot és arra helyezük a lécet.

Megvizsgálva a rendszer egyensúlyát és felírva az egyensúlyi feltételekből származó egyenleteket határozzuk meg a léc tömegét (m_l), az alátámasztás tapadási tényezőjét (μ), valamint azt, hogy mekkora tömeget mutat a digitális mérleg (m_3).

Méréssel ellenőrizzük a számítások eredményét.

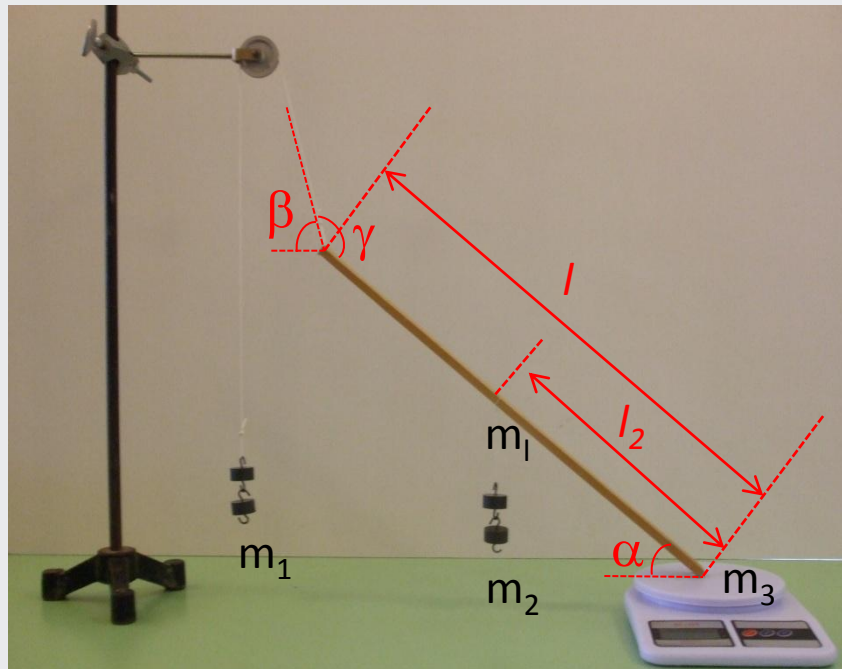
Méréssel kapcsolt 4. számpélda

Eredmények:

$$m_l = \frac{2 \cdot m_1 \cdot l \cdot \sin(\beta - \alpha) - 2 \cdot m_2 \cdot l_2 \cdot \cos \alpha}{l \cdot \cos \alpha}$$

$$m_3 = (m_l + m_2 - m_1 \cdot \sin \beta)$$

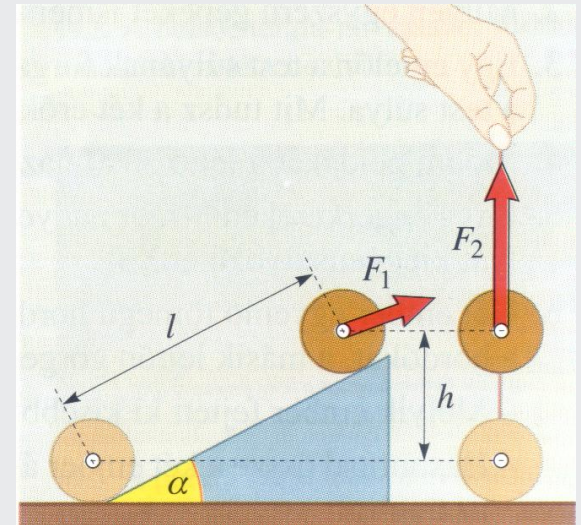
$$\mu = \frac{m_1 \cdot \cos \beta}{m_3}$$



EGYSZERŰ GÉPEK

Azok az eszközök, amelyekkel kedvezőbbé lehet tenni az erőhatás nagyságát, irányát, támadáspontjának helyét.

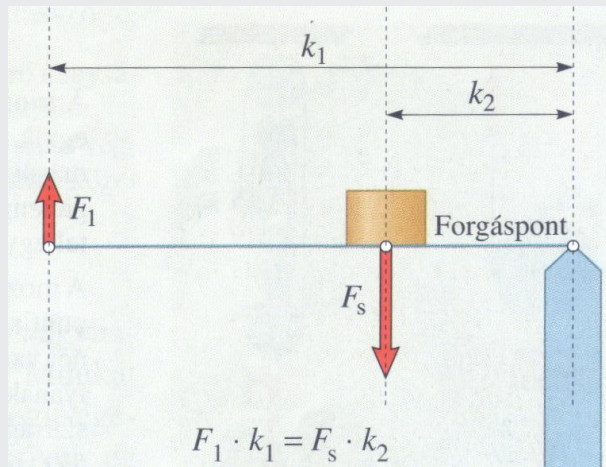
Az egyszerű gépekkel munkát nem takaríthatunk meg, de ugyanazt a munkát kisebb erővel végezhethetjük el.



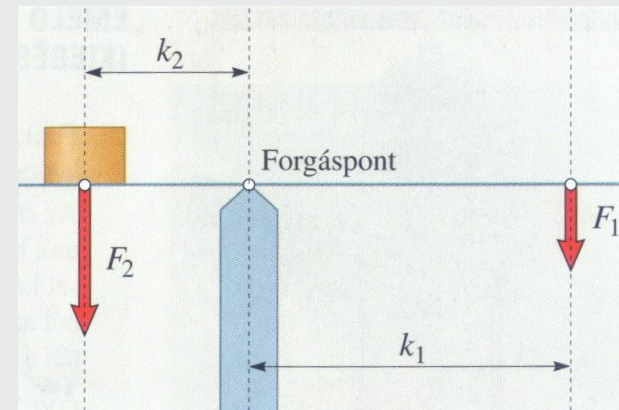
Emelő

Egy tengely körül elforgatható merev rúd.

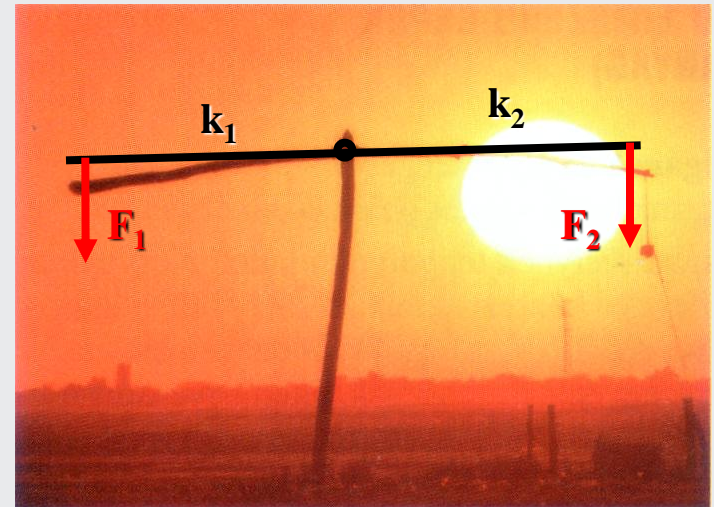
Egyoldalú emelő:
a forgástengely az emelő egyik végén van



Kétoldalú emelő:
a forgástengely az erők támadáspontja között van



Például...



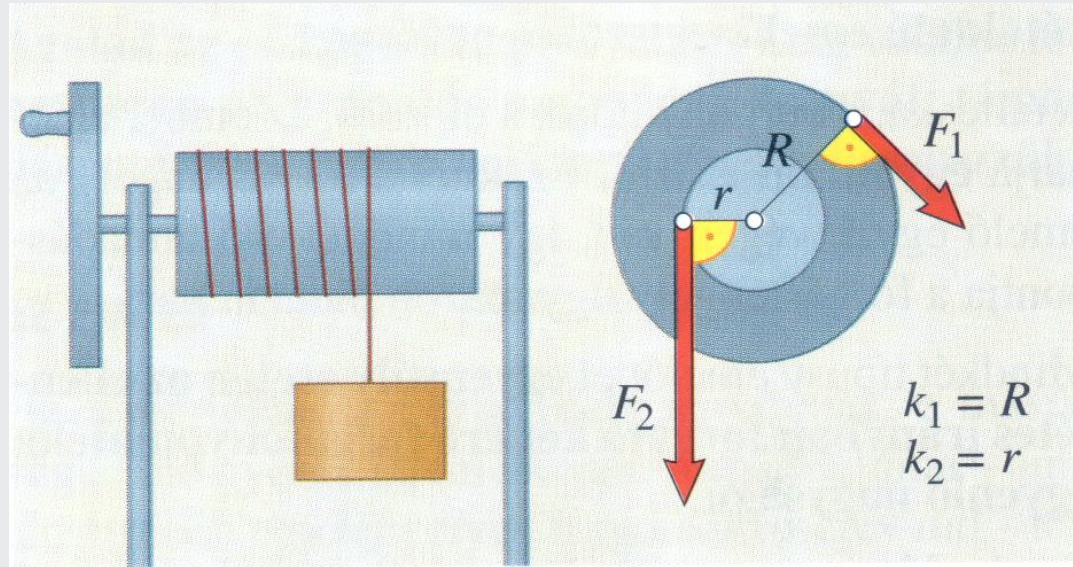
Az emelők egyenlete a forgási egyensúlyból:

$$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$$

Hengerkerék

Egymáshoz rögzített henger és kerék, melyeknek tengelyük közös, de sugaruk különböző.

Például...



$$F_2 \cdot r = F_1 \cdot R$$

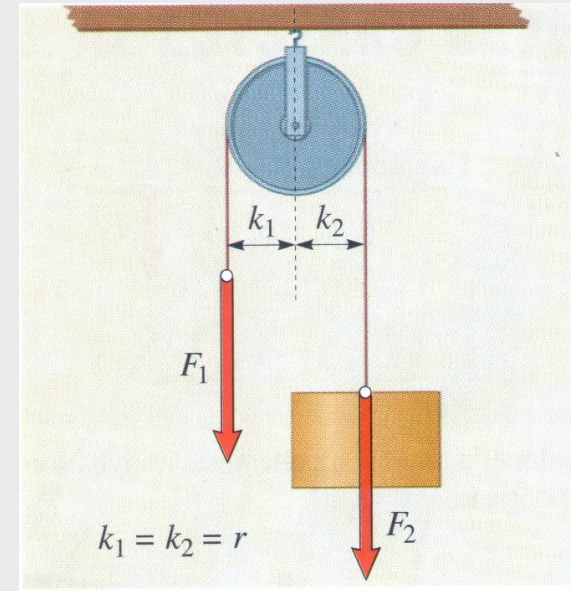
Csigák

Olyan tengelye körül forgatható kerék, melynek peremén kötél van átvetve.

Állócsiga:

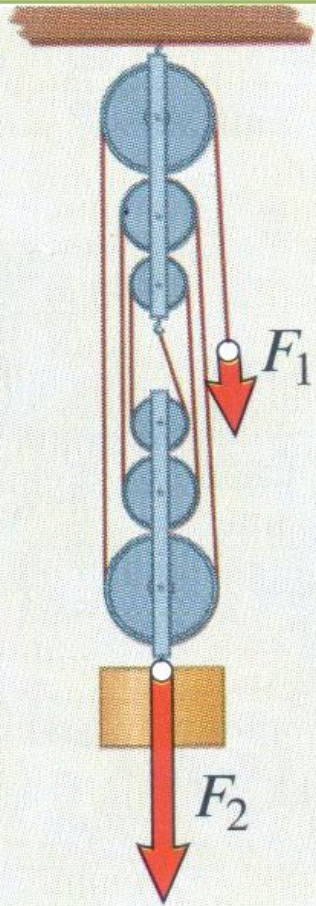
olyan csiga, melynek tengelye rögzített.

Állócsiga használatával nem csökkenthető az ellensúlyozó erő nagysága, csak az iránya tehető kedvezőbbé.



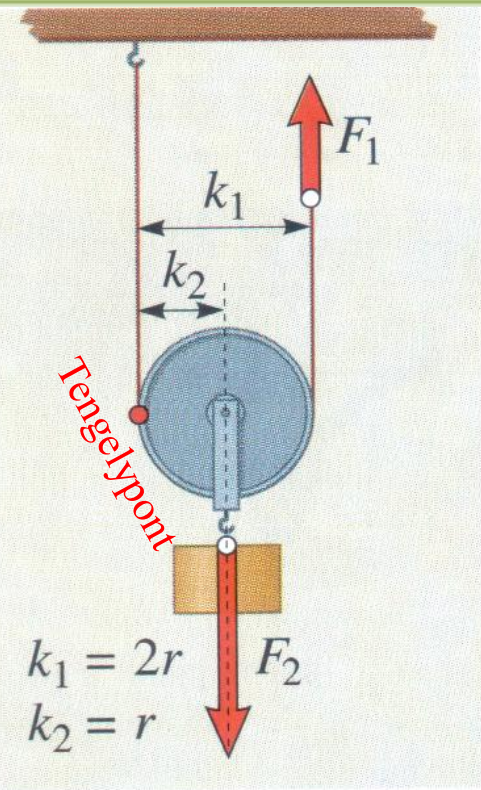
$$F_1 = F_2$$

Csigák



Mozgócsiga:
alulról átvetett kötélt tartja,
amelynek egyik végét az
emelési pont fölött rögzítették
A mozgócsiga megfelel az
ellensúlyozó erő
nagyságát

Csigasor:
álló- és mozgócsigákból áll.
Az ellensúlyozó erő fordítottan
arányos a csigák számával.

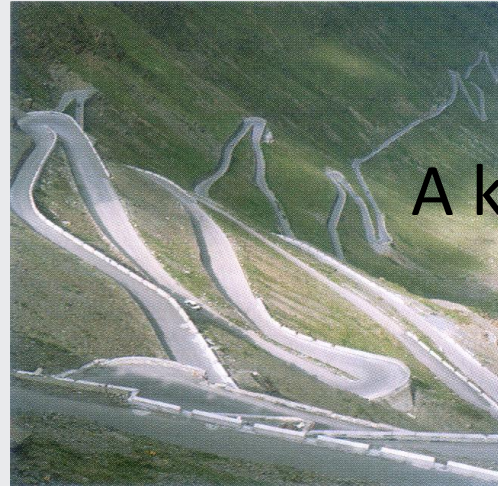
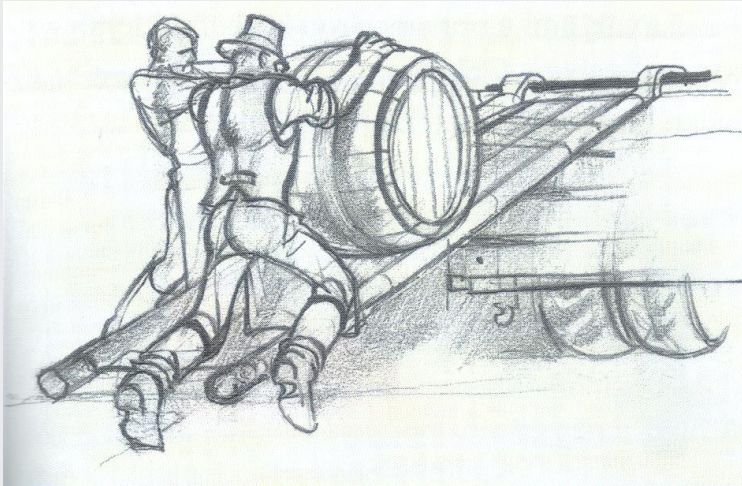
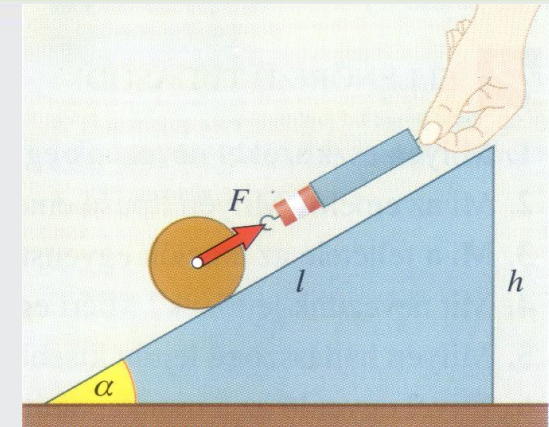


$$F_1 \cdot k_1 = F_2 \cdot k_2$$

Lejtő típusú egyszerű gépek

Lejtő:

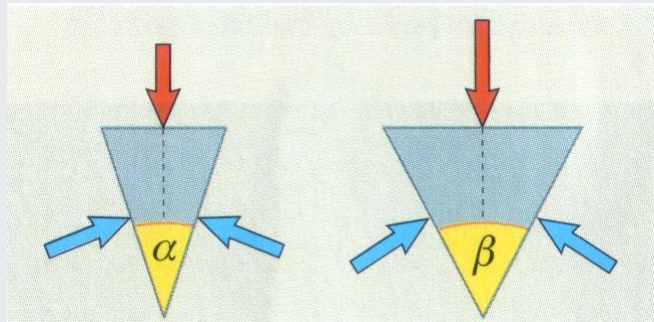
a vízszintessel hegyesszöget bezáró síkfelület



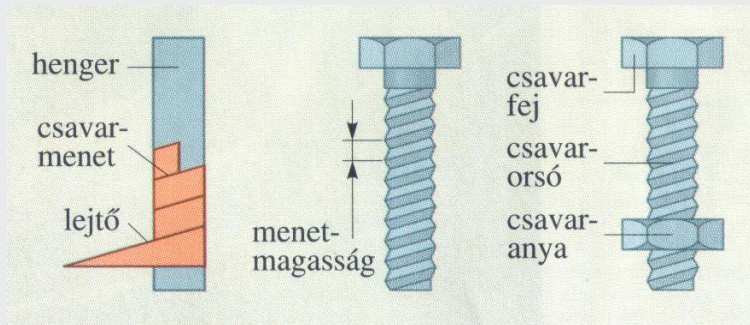
A kiegyensúlyozó erő:

$$F = G \cdot \frac{h}{l} = G \cdot \sin \alpha$$

Például...



Ék:
két, lapjával
összeerősített lejtő



Csavar:
a csavarszáron
körbefutó lejtő

Ellenőrző kérdések

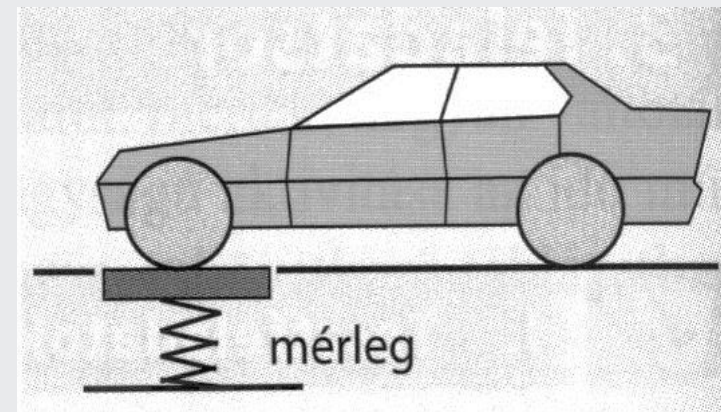
1. Egy falusi kút olyan hengerkeréknek tekinthető, melynek hengere 15 cm, kereke pedig 45 cm sugarú. Ha a kereket 30 N nagyságú, a kerék érintőjébe eső erővel tudjuk egyenletesen forgatni, akkor a hengerre felcsévélődő (elhanyagolható tömegű) kötélen végén lógó vizesvödör tömege

- a) 1 kg
- b) 10 kg
- c) 9 kg
- d) 90 kg



Ellenőrző kérdések

2. Egy autó tömegét szeretnénk megmérni, de az autó nem tud egyszerre az első és hátsó kerekeivel ráállni a hídmérlegre. Ha az első kerekeivel áll rá, akkor 700 kg-ot, ha pedig a hátsó kerekekkel, 600 kg-ot jelez a mérleg. Megállapítható-e ezek alapján a gépkocsi tömege?



- a) Igen az autó tömege 1300 kg.
- b) Igen, az autó tömege 650 kg.
- c) Igen, az autó tömege 800 kg.
- d) Nem, az első és hátsó kerekeknek egyszerre kellene a mérlegen lennie

Ellenőrző kérdések

3. Válassza ki a helyes állítást! Hol helyezkedik el, milyen irányú, és mekkora az az erő, amely egymástól 0,8 m távolságban lévő, 5 N és 15 N nagyságú, egymással párhuzamos, ellentétes irányú erőket egyensúlyozza?
- a) a két erő között, az 5 N nagyságú erőtől 0,6 m-re, vele ellentétes irányú és 10 N nagyságú
 - b) a két erő között, az 5 N nagyságú erőtől 0,2 m-re, vele egyirányú és 20 N nagyságú
 - c) Nem a két erő között, hanem az 15 N erőtől 0,4 m-re, és vele ellentétes irányú, nagysága 10 N
 - d) A 15 N erő hatásvonalától a másik erővel ellentétes oldalon 0,6 m-re, vele ellentétes irányú, nagysága 10 N

Ellenőrző kérdések

4. Válassza ki a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás helyes legyen! A merev testre ható erő hatásvonala mentén?
- a) csak akkor tolható el, ha nagyon kicsi.
 - b) csak akkor tolható el, ha az erő hatásvonala átmegy a tömegközépponton.
 - c) csak akkor tolható el, ha támadáspontja a tömegközéppontban van.
 - d) mindig eltolható.

Ellenőrző kérdések

5. Melyik egyszerű géppel nem csökkenhető az egyensúlyozó erő nagysága?
- a) lejtő
 - b) mozgócsiga
 - c) állócsiga
 - d) ék

Ellenőrző kérdések

6. Válassza ki a félbehagyott mondat folytatását úgy, hogy az állítás helyes legyen! Egy test tömegközéppontja csak akkor végezhet egyenes vonalú mozgást, ha:
- a) a testre egy egyenesbe eső erők hatnak
 - b) a testre ható külső erők eredő nyomatéka nulla
 - c) ha a testre ható külső erők eredője zérus
 - d) a testre ható külső erők eredőjének hatásvonala átmegy a tömegközépponton.

Ellenőrző kérdések

7. Milyen egyszerű erőátviteli eszköz a képen látható diótörő?

- a) egyoldalú emelő
- b) kétoldalú emelő
- c) ék
- d) lejtő



8. Melyik állítás nem igaz?

- a) Létezik olyan eset, mikor egy test nyugalomban van, de nincs egyensúlyban.
- b) Létezik olyan eset, mikor egy test egyensúlyban van, de nincs nyugalomban.
- c) Létezik olyan eset, mikor a test egyensúlyban van, de a gyorsulás nagysága nem nulla.
- d) Létezik olyan eset, mikor a test egyensúlyban van és egyenes vonalú egyenletes mozgást végez.

9. Melyik állítás nem igaz?

- a) Ha egy tengelyezett testre egyetlen erő hat, akkor az mindig forgatja a testet.
- b) Ha egy tengelyezett testre két egyenlő nagyságú erő hat, akkor ezek forgatónyomatéka lehet nulla.
- c) Ha egy tengelyezett testre két különböző nagyságú erő hat, akkor ezek forgatónyomatéka lehet nulla.
- d) Ha egy tengelyezett testre egy a tengelyre merőleges síkú erőpár hat, akkor a forgatónyomaték nem nulla.

Ellenőrző kérdések

10. Melyik állítás nem igaz?

- a) Ha egy testre két egyenlő nagyságú, de különböző hatásvonalú erő hat, akkor ezek mindig helyettesíthetők egyetlen erővel.
- b) Ha egy testre két egyenlő nagyságú, de különböző hatásvonalú erő hat, akkor ezek soha nem helyettesíthetők egyetlen erővel.
- c) Ha egy testre két egyenlő nagyságú, de különböző hatásvonalú erő hat, akkor lehetséges, hogy ezek nem helyettesíthetők egyetlen erővel.