Szűcs Miklós

A tér élmény megragadási kísérlete a geometria axióma rendszereiben*

* A tanulmány pályaműként vett részt a Magyar Tudományos Akadémia „*Magyarország kutató tanára - 2021*” pályázatán

„Pont az, aminek nincs része.” Ezzel a mondattal kezdődik Euklidész tudománytörténeti léptékű műve, egy szigorú logikán alapuló gondolati rendszer, melyben axiómákra alapozva próbálja meg összefoglalni korának geometriai ismereteit. Megismerkedve axiómáival, posztulátumaival, az elegáns bizonyításokkal, jólesően pihenünk meg a mű terebélyes gondolatainak árnyékában. Újra és újra olvasva sok érdekes részletre figyelünk fel, melyek felett korábban esetleg átsiklottunk. Mivel a szellemi építmény alapjáig akarunk hatolni, szavanként morzsoljuk a szerző gondolatait. Felsejlik Euklidész különös feltételezése: a fizikai tér nem üres, önálló „élő” entitás, formája van. Erre enged következtetni egyszerű szikár szavaival, tömören megfogalmazott párhuzamossági axiómája.

A párhuzamossági axiómában megtestesülő „élő tér” gondolatát két évezreden keresztül nem tudták elfogadni matematikus társai. Elsőként a nagyszerű Bolyai értette meg teljes mélységében Euklidész gondolatait, s mivel megértette, képes volt tovább gondolni azokat.

Valóban van formája az üres térnek? És ha igen, hogyan ismerhetjük meg ezeket a láthatatlan formákat? Egy izgalmas szellemi utat járunk be a következőkben az Euklidészi axiómák, illetve a Bolyai és Hilbert által javasolt alternatív axiómák gondolati terében.

Tartalom:

Axiomatika

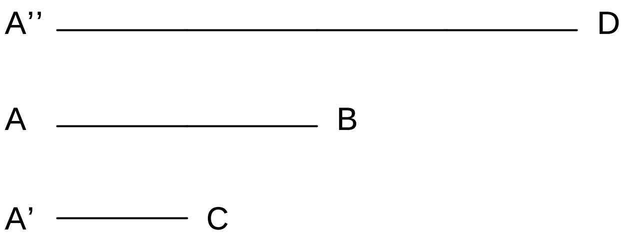
Az ókori geometriai ismeretek tárgyalásához szükséges fejlett axiomatikus gondolkodás legteljesebb ismert vértezetében Euklidész Στοιχεια (Sztoikheia) című munkájában jelenik meg. Στοιχος (Sztoikhosz) – vadászhálótartó oszlopok sora, sorfal, rend; Στοα (Sztoa) – oszlopok sorából kialakított fedett csarnok, ahol a „Sztoikusok" gyülekeztek διαλεκτικο'ν (dialektikón) – dialógusban folytatott bölcseleti vitára; Στοιχειον (Sztoikheion) – Őselemek, amin a világ rendje nyugszik (Platón), átvitt értelemben alapfogalmak és alapelvek. Proklosz szerint az Euklidészt megelőző időkben is foglalkoztak az úgynevezett geometriai Őspríncípiumok, azaz *Elemek* összeállításával. Ilyen volt például a chiosi Hippokratész, vagy a magnesiai Theudiosz, ezért vita van arról, mennyiben önálló, avagy mennyiben rendszerező mű a Στοιχεια.

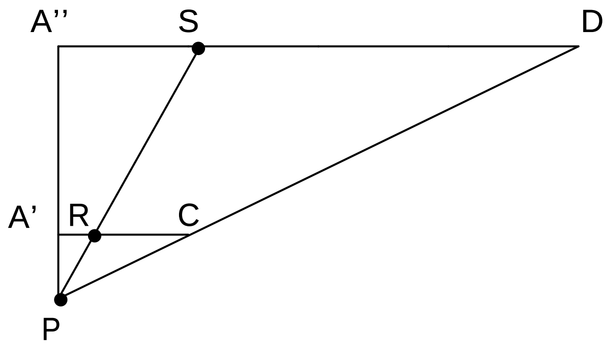
Az *Elemek* tizenhárom tematikus könyvre (fejezetre) tagolódik. Minden fejezet a fejezetben szereplő új fogalmak meghatározásával kezdődik, majd logikus sorrendben egymásra épülő tételek következnek, bizonyításaikkal. A legelső könyv elején egyedülálló módon, két csoportra bontva, felsorolásra kerül tizennégy olyan állítás, melyeknek egyike sincs bizonyítva, azonban mindegyikük felhasználásra kerül a későbbiekben a könyvek egyes bizonyításaiban, sok esetben többször is.

A fejezetek elején található meghatározások neve **hóriszmósz** - ο'ρισμο'ς (óriszmósz), azaz az új fogalmak tartalmának *elhatárolás*a, más, nem odaértendő tartalmaktól (latinul hasonló értelemben *definíció*).

Az első könyv elején található nem bizonyított állítások első csoportjának minden tagja **aitéma** - αι'τη'μα (aitéma), azaz kérés (latinul hasonló értelemben *posztulátum*). A kérések arra vonatkoznak, az olvasó – vitapartner – egyezzen bele, bizonyos szerkesztések elvégezhetőségébe. A posztulátumok tehát egyoldalúan megfogalmazott, beleegyezést kívánó kérések. Ilyen posztuláció például: *követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz egyenes legyen húzható*, vagy *követeltessék meg, hogy minden középponttal és minden távolsággal legyen kör rajzolható*. Ezt az állítás csoportot részben az eleai filozófiai iskola „nincs mozgás" szemlélete kényszeríti ki, jelezve, mozogni kívánunk a síkon, még akkor is, ha mindez csak φανταστικο'ς (fantasztikósz) képzeletbeli. Van még egy legalább ilyen fontos érv ezen állításcsoport összeállítása mellett. A gyakorlati tapasztalat szerint egy jó mesterember „teremtő", azaz pl. egy használati tárgyat képes manuálisan megalkotni. Ettől kezdve a használati tárgy önálló életre kel, bekerül a létezés bonyolult körforgásába. Ha tehát egy geometriai alakzat szerkeszthető, annak, a korabeli elképzelés szerint, egzisztenciája nem vitatható. Az évszázadok során számtalan fából készült szerkezet látott napvilágot, melyekkel különféle görbéket, alakzatokat lehetett szerkeszteni. Az ötelemű állításcsoport első három állítása azokat az elemi konstrukciós lépéseket sorolja fel, amelyekkel - a szerző szerint - a szerkesztőszerkezetek sokszerűsége minimalizálható, és valódi egzisztenciával bíró objektumok szerkeszthetők.

A második nem bizonyított állításcsoport minden tagja **axióma** - α′ξι′ωμα (axióma), azaz *magas értékű, figyelemre méltó állítás*. Szofoklész az istenek kinyilatkoztatásait, melyeket jobb figyelembe venni, szintén axiómának mondja, így tehát követelménynek is fordíthatjuk. Platón is ebben a követelmény-követelés értelemben használja a szót. Proklosz Arisztotelészre hivatkozva azt közli: az „*axióma nem bizonyítható, de mindenki elfogadja az ilyen állítást lelki alkatánál fogva, mégha egyesek vitatkozó kedvükben kétségbe is vonják az ilyent*”. Ennek az állításcsoportnak az állításai, például a nyolcadik: *az egész nagyobb a résznél*, szintén tartalmaznak reflexiókat az eleai filozófia tanításaira. Elég, ha Zénon *Ugyanannak kétszerese egyenlő fele részével* antinómiájára gondolunk.





Legyen az *A’C* szakasz fele az *AB* szakasznak, az *A’’D* szakasz pedig a kétszerese! Legyen az *A”A’* egyenes illetve a *DC* egyenes metszéspontja *P*! Az *A’’D* szakasz tetszőleges *S* pontjának az *A’C* szakasz pontosan egy pontja felel meg (*R*), és *A’C* egyetlen pontja sem marad ki. A kétszer olyan hosszú *A’’D* szakasznak tehát ugyanannyi pontja van, mint a fele olyan hosszú *A’C* szakasznak. A nyilvánvaló ellentmondást, ma, kétezer ötszáz év elteltével (!), Planck hatáskvantumának mintájára, egy merész hipotézissel fogjuk feloldani: nem lehet minden határon túl felosztani a teret, így egy szakaszt sem. Létezik ugyanis *távolság kvantum*!

A megelőlegezett posztulátumokat és axiómákat követő definíciókat minden esetben bebizonyított állítások, tételek követik. A **theoréma** - θεορε’μα (theoréma), azaz tétel szó első része (θεο) szóösszetételekben isteni eredetűségre utal, a ρε’ο pedig folyik, ömlik, kiárad értelmű. A theorémák tehát a dolgok kétségtelenül igaz (isteni) folyományai. A tételek szigorú sorrendben követik egymást. Minden egyes tétel igazsága egy vagy több korábban kimondott tétel igazságán nyugszik, illetve az axiómák és posztulátumok igazságán. A legelsőként kimondott tétel értelemszerűen csakis az axiómák és posztulátumok igazságán nyugodhat. Érdekes, hogy az *Elemek* nem reflektál a helyes levezetési szabályokra, azokra a gondolati konstrukciós lépésekre, illetve ezek axiomatizálására, melyekkel igaz állításokból kiindulva mindenképp, de legalábbis posztulált értelemben, igaz állításokat generálhatunk. Ezeket a lépéseket magától értetődőnek tekinti. További két évezredre lesz szükség az ismeretelmélet kibontakozásához, a gondolkodás és nyelv mélyebb kapcsolatának, a modellált igazság fogalmának feltérképezéséhez.

Fogalmi rendszer

Egy fogalmakon alapuló nyelvi rendszer segítségével leírt szellemi építménynek lehetnek:

igaznak és korrektnek tűnő részletei

hamisnak tűnő bizonytalan részletei

bizonytalannak, de menthetőnek tűnő részletei.

A beszélt-nyelvi leírás hibái következhetnek az agy-nyelvi struktúrákban megtestesülő gondolat hibáiból (inkorrekt képzet), de egy egzakt agy-nyelvi gondolat beszélt-nyelvi szintre történő lefordításának hibájából is (fordítási hiba). Az is előfordulhat, az egyébként egzakt (intuitív) agy-nyelvi struktúrának még nincs megfeleltethető beszélt-nyelvi, fogalmi struktúra (fogalom hiány), ezért csak pontatlansághoz vezető körülírással adható meg a gondolat nyelvi alakja.

A megismerő ember rögzített szituációkban a rá jellemző módon, konzekvensen viselkedik. Ez nyilván személyiségéből fakad. Ez azonban csak egy *fenomenon*, a magasan szervezett társas-humán jelenségszintje. Az agy sejtstruktúráinak szintjén valahol megvan ennek a következetességnek a sejtszintű fenomenonja – például a kálium-ion szint sejtmembránban történő változási hajlandóságában; ennek még mélyebb szintű oka a DNS szekvenciákban, és tovább még mélyebben a kvantum-állapotok egyedi megváltozási hajlandóságának törvényszerűségeiben. Az egyes fenomenológiai rétegek külön életet élnek, még akkor is, ha a magasabb rétegek időnként visszahatnak speciális külön csatornákon. Amikor az absztrakt matematikának sikerül lemodelleznie egy réteget, kezdve a megismerő ember számára természetesen adott makroszkopikus környezettel, bizonyos >>fogalmi hajszálerek<< mentén a modell egyes elemei „leszivároghatnak” alacsonyabb rétegekbe. Mivel a megismerő, mint >>lény<< nem tudja anyagi szinten „lekicsinyíteni”, átalakítani magát, ezért gondolat dimenzióban kell felépítenie az egyes fenomenonok virtuális absztrakcióját. Ez egy új >>teremtés<<, egy új >>világ-tér<<, egy új >>Én<<. Ekkor az Énnek az *absztrakt* empirikus szemlélése közben új fogalmai születnek meg. Innentől az utóbb említett szükségszerű körülírás adekvát fogalmakkal helyettesíthető.

Egy fogalmi rendszer által leírt szellemi építmény értelmezésekor legalább két, egymástól végletesen különböző utat követhetünk. Az egyik véglet az abszolút negatív attitűd: kérlelhetetlen következetességgel minden olyat elvetünk, és ezáltal kiejtünk az elméletből, ami megalapozatlan vagy hamis. Ilyenkor általában az elmélet kiüresedik, semmi sem marad belőle. A másik véglet az abszolút pozitív attitűd: maximális jóindulattal, és nagy türelemmel próbáljuk menteni, ami menthető, a pontatlan fogalmazásokba belelátni valami jót, amire talán eredetileg a szerző is gondolhatott.

Definíciók

1. Pont az, aminek nincs része.

Ez a könyv első mondata. Egy fogalmat próbál meghatározni, a geometria világában létező alap objektum, a *pont* fogalmát. Erre szükség van, hiszen egy üres világban kiről vagy miről fogalmazhatnánk meg bármiféle állítást is?

Negatív attitűd (tágabb megközelítés):

Az első mondattal az éppen megteremteni kívánt új világ egy objektumát nevesítjük (*Pont*), melyhez jól felismerhető állapotot rendelünk (*nincs része*). Ezzel az ártatlannak tűnő mondattal azonban rögtön több súlyos előfeltétel meglétét várjuk el hallgatólagosan:

- *a teremteni kívánt absztrakt világban létezik >>állandóság<<*
- *az állandóság >>időbeli<<*
- *az időbeli állandóság megteremti >>alanyiságok<< létrejöttének lehetőségét*

  (az alanyiság egyet jelent az individuális objektum létezésének lehetőségével)
- *>>létezik<< alanyiság*

  (az állandóság létéből még nem következik, hogy van is, ami állandó; nem tudjuk, hogy a létezők állandósága hozza-e létre az állandóságot megalapozó fogalmunk mintáját, és azt sem, hogy az állandóság megtestesül-e ideaként a szellemi dimenzióban létező nélkül is; ez utóbbi esetben értelmes a zárójel első mondata)
- *van megismerő >>szubjektum<<*
- *a megismerő szubjektum számára a létező >>felismerhető<<, mert a létező az állandóság hatására az időben önazonos módon, egyedként létezik.*

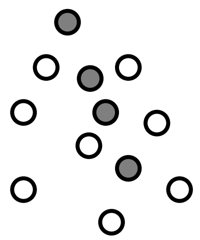
  (az utóbbi két feltétel az állandósági feltételt árnyalja; valójában nincs szükség megismerő szubjektumra; pusztán arra utalunk, egy jól definiált háromszög nem fog magától alakot váltani életciklusában pl. miközben szemléljük)

Előfeltevésként nem kevesebbet kívánunk hát, az új világ legyen olyan, mint amiben élünk, modellezze az Univerzumot, a maga alig ismert rejtélyes törvényszerűségeivel, benne a megismerő, környezetére sajátos módon reflektáló, öntudattal rendelkező emberrel.

Negatív attitűd (szűkebb megközelítés):

Az első megteremteni kívánt objektumot, azaz az első létezőt olyan tulajdonsággal próbáljuk meghatározni, ami még nincs definiálva: „*rész*” vagy *„részének lenni”.* A rész fogalma egy többszereplős viszonyra tesz utalást, és még csak egyetlen létezőnk van. De nem ez a baj vele, ugyanis, ha már van egy pontunk, akkor lehet akár több hasonló is. A baj az, mi van akkor, ha új világunk tere „lyukas”? A „tér” fogalma és az alábbi fogalmak még nincsenek bevezetve, de most utalunk rájuk: Egy körív közelében lévő, a kör síkjában fekvő pontról klasszikus elgondolás szerint úgy dönthető el, hogy a kör belső pontja-e, hogy tudunk-e belőle, mint kezdőpontból félegyenest indítani úgy, hogy a félegyenes ne messe a körívet. Ha igen, akkor a pont külső pont, egyébként belső, azaz része a körlemeznek. Itt egy XX. században kialakult fogalomra, a topologikus halmazra, illetve egy ezen értelmezett folytonos függvény XVII. században kialakult fogalmára teszünk utalást. Lényegében egy kontinuus távolság fogalom létének rejtett feltételezésével állunk szemben. Nincs azonban garancia arra, hogy az imént elgondolt távolság fogalom mind a 100 nagyságrendben lefedi valódi fizikai terünk struktúráját.

Megteremtett új világunk álljon 12 pontból. Amit látunk a teljes „világtér". A szürkével jelzett pontok alkossanak „egyenest". Ebben a „lyukas" (diszkrét) térben a jelzett pontok bármelyike vajon belső pont-e, és ha igen, melyik pont-sokasághoz képest? És miért?



Egy újabb probléma: amikor kiüresítjük a határvonal határolta belső tartományt, hogy ponthoz jussunk, már elgondoltunk egy vonalat, a *határvonalat*, noha bármilyen vonalat majd csak később, éppen a pontból szeretnénk fejleszteni.

Pozitív attitűd (tágabb megközelítés):
Igen, vannak rejtett előfeltevéseink! Végül is saját világunkat próbáljuk absztrahálni. Valamiből ki kell indulnunk!

Pozitív attitűd (szűkebb megközelítés):
A definíció világos. Elképzelünk egy körlemezt, majd folyamatosan csökkentjük a körlemez sugarát egy eléggé kis értékig.

2. A vonal szélesség nélküli hosszúság.

A könyv második mondatából megtudjuk, van egy új típusú létezőnk (*Vonal*) és két új tulajdonságunk *(szélesség, hosszúság).* Nem tudjuk azonban, az eddig definiált két létező és három tulajdonság milyen viszonyban van egymással, hiszen a tulajdonságok egyike sem definiált még. Annyit mindenesetre már tudunk – kizárólag a nyelv szintaxisa alapján - a *Vonal* a *szélesség* nevű tulajdonság terjedelmének legkisebbikét (=0 ?), vagy egyikét sem, a *hosszúság* nevű tulajdonság terjedelmének bármelyikét birtokolhatja. A tulajdonságok terjedelmei (felvehető értékei) ugyanakkor nem ismertek. Az, hogy a terjedelmek nem alkotnak üres halmazt csak abból valószínűsíthető, hogy a megismerő szubjektum, nem szokott tudatosan felesleges dolgokat csinálni. (minek definiáljunk egy üres terjedelmű tulajdonságot? – a megismerő tehát mégiscsak jelen van a háttérben!).

3. A vonal végei pontok.

Teremtett világunk kezd elérni egy kritikus bonyolultságot. Pedig még további 20 definíció, öt posztulátum, és kilenc axióma hátra van az első fejezetből, és 104 további definíció illetve az új világunkat meghatározó 466 levezethető Theoréma (Tétel).

Ebből a definícióból megtudjuk, van egy újabb tulajdonság: *vég* vagy *végének lenni.* A tulajdonságok száma négyre nőtt, és van egy olyan érzésünk, a részének lenni illetve a végének lenni tulajdonságok nem ugyanúgy tulajdonságok, mint a szélesség és a hosszúság. Ezen utóbbiak azonosításához ugyanis az objektumnak „el kellene hagynia önmagát”.

Negatív attitűd (tágabb megközelítés):

Vezessük be Georg Cantor matematikus nyomán a $\exists$ (Egsistiert - létezik) jelet illetve annak tagadásának jelét $\neg\exists$ (nem létezik), továbbá jelöljük a tulajdonságokat nevük nagy kezdőbetűjével, kerek zárójelpárt írva utánuk, ahová beírhatjuk annak az objektumnak a nevét, amely már definiáltan létezik és egyben értelmezhető a kapcsolat az objektum és a jelölt tulajdonság között. Az eddigieket ezek után tömören így fogalmazhatjuk meg:

$$\exists P\ \neg\exists\ R(P)\ \exists V\ \neg\exists\ S(V)\ \exists\ H(V)\ V(V) \equiv P$$

azaz: *létezik pont, nem létezik része a pontnak, létezik vonal, nem létezik szélessége a vonalnak, létezik hosszúsága a vonalnak, a vége a vonalnak pont.*

Sajnos abban a pillanatban, ahogy kivesszük a jeleket magyarázó leíró nyelvet a jelek mögül, az állítások kiüresednek! Semmilyen kapcsolat nincs megadva „mozgásában” (önmagyarázó módon) az egyes létezők között. Az sem derül ki, mely jelek utalnak a létezőkre. Nem tudjuk, megadhatnánk–e egyáltalán jelekkel a kapcsolatokat úgy, hogy a jeleket magyarázó nyelvet eliminálva továbbra is érthető maradjon a szellemi építmény. Talán a négydimenziós téridőben kis történeteket kellene „leforgatni”, és minden egyes történet egy kapcsolat analogonja lenne. Látszik, szükségünk van egy működő rendszerre absztrakt rendszerünk működésének leírásához. Az is látszik, az egyébként korrektül működő rendszert saját maga empirikus absztrakciójával igyekszünk leírni. Le lehet-e írni egy ízletes süteményt saját absztrakciójával?

Negatív attitűd (szűkebb megközelítés):

A definícióból sajnos nem derül ki, hány darab vége van a vonalnak! Az sem egyértelmű, a pont a vonal „vonalságot meghaladó”, külsődlegesen hordozott tulajdona-e, azaz van vonal végpont nélkül, vagy a pont a vonal „szerves része”, amiből részben vagy egészben áll.

Pozitív attitűd (szűkebb megközelítés):

A vonal egydimenziós sokaság, ezért nincs szélessége, viszont ugyanezért van hosszúsága és pontokban végződik.

4. *Egyenes vonal az, amelyik a rajta lévő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik.*

Megtudjuk, hogy van egy vonaltípus, amely más, mint a többi, azaz legalább kétféle vonal van. Elfogadva a „rajta lévő" kifejezést, mint közvetett utalást, annak egy lehetséges értelmezése szerint a vonal fogalmának meghatározása kibővül: a vonal pontokból áll. A mondat megfogalmazása alapján ez a közvetett utalás bármely, tehát nemcsak „egyenes" vonalra érvényes. A többes szám használatából következik az is, van olyan vonal, amely legalább két pontot tartalmaz. Az eddigiek alapján, legkevesebb két vonal objektumunk és három pont objektumunk van, világunk tehát legalább ötszereplős: van egy vonalunk, amelynek legalább egy végpontja van, és van egy egyenes vonalunk is, amelyen legalább két pont található.

Negatív attitűd (szűkebb megközelítés):

A negyedik definíciót is magunk mögött hagyva felvetődik a kérdés: vannak egyáltalán objektumaink? Nem üres az éppen teremtés alatt álló világunk? Lehet, hogy nincs is olyan vonal, amely *„a rajta lévő pontokhoz viszonyítva egyenlően fekszik"* Lehet, hogy nincs is egyenes! (Egy definíció sohasem teremtő! „A kerub egy olyan lóhoz hasonlatos lény, amely ló nyak és lófej helyett férfi felsőtesttel rendelkezik". A definíció precíz, mégsem biztosítja önmagában egy ilyen lény létezését.)

Szeretnénk benépesíteni absztrakt világunkat! Vajon egy V-objektum (vonal) monolit egész? Vannak strukturális részei? Darabolható? És ha igen az egyes darabok megmaradnak-e V-objektumnak (vonalnak)? Hány P-objektumból (pontból) áll egy V-objektum (vonal) – ha abból áll -? El lehet-e jutni az absztrakt világ egyik objektumából a másik objektumába? Bejárható az Univerzumunk? Van >>mozgás<<? Ezekre a kérdésekre még nem tudjuk a választ.

Pozitív attitűd (szűkebb megközelítés):

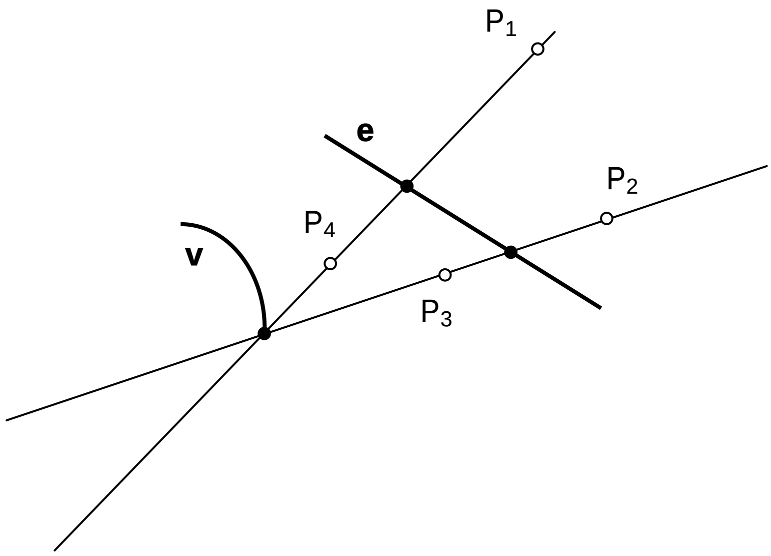
Egy vonal egyenesség tulajdonságának megragadása roppant nehéz. Akinek sikerül, fogalmi szinten birtokolja a teret. Az „egyenlően fekszik" kifejezés meglehetősen homályos, de megpróbáljuk érteni. Egyébként pedig úgy tűnik, segítségünkre lesz két idevonatkozó posztulátum.

Posztulátumok

1. ***Követeltessék meg, hogy minden pontból minden ponthoz legyen egyenes húzható.***

2. ***És hogy véges egyenes vonal egyenesben folytatólag meghosszabbítható legyen.***

Végre, benépesülhet világunk! Kössük össze külön-külön, nem egyenes vonalunk (v) biztosan létező (vég)pontját egyenesünk (e) biztosan létező (rajta fekvő) egy-egy különböző pontjával! Az így kapott két egyenest hosszabbítsuk meg folytatólag mindkét irányban. Válasszunk ki a két egyenesen különböző pontpárokat (P_1 - P_2, P_3 - P_4, …), és éljünk a két posztulátum adta lehetőséggel újra és újra, ameddig csak akarjuk.



Negatív attitűd (tágabb megközelítés):

Az említett két posztulátum két olyan kifejezést is tartalmaz, amely terünk folytonosságára és ezáltal „végtelen oszthatóságára” tesz utalást: >>húzható<<, >>meghosszabbítható<<. Az első előképre utalva: amikor egy szánt *húzunk* a földön, a szán *folytonos* nyomot hagy, és nem érzékeljük, hogy „bukdácsol”. Nem esünk ki a térből a tér egy pontján, és nem kell ez után különös erővel visszaugranunk a szánnal a tér következő pontjába, hogy újra >>Itt<< legyünk. Világunk biztosítja a folytonosságot, és a második előképre utalva a tágasságot is. Ezek a fogalmi utalások még mélyebb struktúrák meglétét feltételezik, mint a részének vagy végének lenni.

A „húzni” és a „meghosszabbítani” cselekvő igék elhelyezik modellünkben az >>esemény<< fogalmát, megjelenik az idő dimenzió. Egyre inkább látható, a modellnek átélt világunk a mintája.

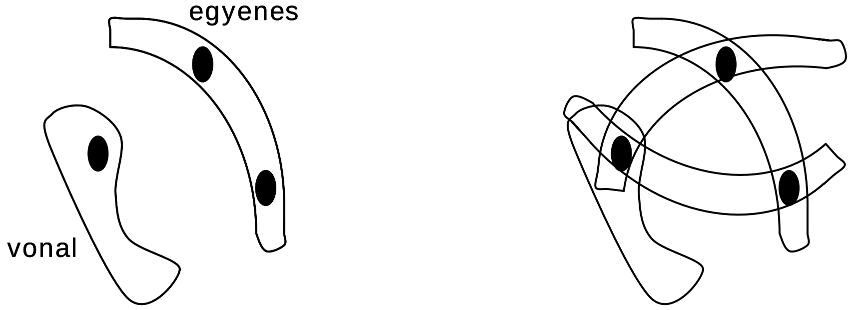
Csak egy intelligens szubjektum képes célirányosan „húzni”, vagy „meghosszabbítani”. Ha helyettesítjük ezt a cselekvőképességet a „megvalósultsággal”, az azt jelenti: egyszerre van jelen a geometria

„szellem világának” minden lehetséges objektuma a geometriai térben, a valaha megszerkesztett és a jövőben bármikor megszerkeszteni kívánt összes körrel és egyenessel, alakzattal és felülettel.

Negatív attitűd (szűkebb megközelítés):

Nincs megadva a „húzni” és a „meghosszabbítani” cselekvő igék pontos végeredménye az egyenesek tekintetében. Nem tudjuk, hogyan növesszük a teret. Egyáltalán növeszthető-e ötszereplős univerzumunk?

Az ábra bal oldalán az ötszereplős univerzum látható: egy vonal (?!) egy végpontjával (?!) – nem tudjuk mi az: *vonal,* és mi az*: végének lenni* –, tőle jobbra egy egyenes (?!) – nem tudjuk mi az: *egyenes* –, és annak két pontja (?!). Az ábra jobb oldalán a két posztulátum alkalmazása utáni állapotot látjuk. Először az első posztulátumot alkalmaztuk és magvalósítottuk a *húzni* ige végeredményét: két újabb egyenest helyeztünk eredeti egyenesünk pontjaira, majd a második posztulátum szerint önmagában visszafordulva (?) hosszabbítottunk. Univerzumunk zárt és teljes!



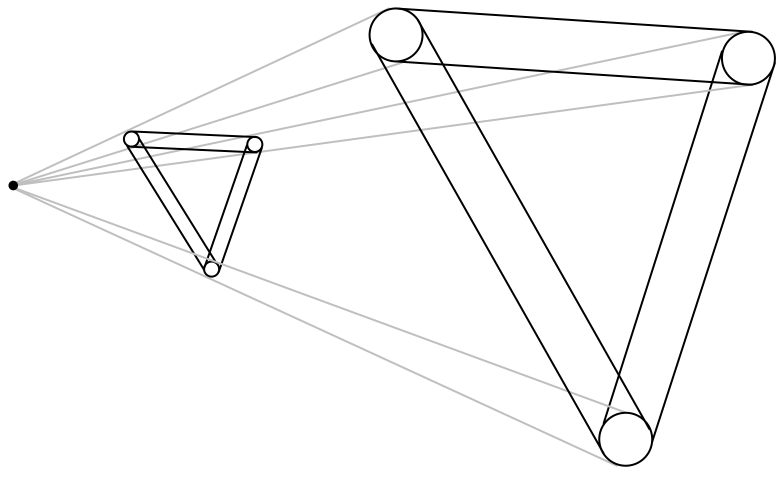
Pozitív attitűd (szűkebb megközelítés):

Ha az előző oldali ábra P_1 pontját a P_2P_3 egyenes minden egyes pontjával párba állítjuk, majd ezen pontpárokra egyeneseket fektetünk, az így kapott egyenes sereg lefedi a síkot. Jöhetnek tehát a síkra vonatkozó definíciók és posztulátumok.

Pozitív szemlélet mellett sem árt az óvatosság:

Három „ős-pontunk” ne legyen egy egyenesen, különben nem tudjuk kifejleszteni a síkot!

Középpontos hasonlóság alkalmazása esetén, ha λ elég nagy (az ábrán $\lambda \approx 3$), még az elegendően kicsinek (pontszerűnek) választott „körlemez-pontunk” is valódi körré „hízik”!



Az „őstér”

Mivel a pontnak nincs része, kiterjedése sincs, így viszont a pontokból álló vonalnak nem csak szélessége nincs, nem lehet hossza sem! A kiterjedés nélküli pontból tehát nem fejleszthető vonal és ezáltal semmilyen geometriai objektum sem, sem sík, sem tér! Érezhető, hogy a semmi és a valami közötti átmenetet nem tudjuk megragadni. Nem tudjuk absztrahálni a teremtés mozzanatát!

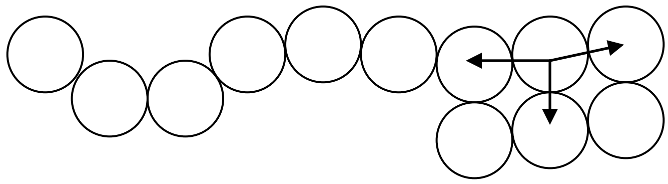
A kiterjedés nélküli pont ideája, láttuk, azért szükséges, hogy nagyításra bármely szerkesztés invariáns legyen. Ez hallgatólagosan azt a feltételezést fejez ki, mint oly sok más esetben is, hogy nagy méretekben a tér ugyanolyan geometriával rendelkezik, mint kicsiben. A nagyíthatóságból viszont következik: kétszer olyan hosszú, nagyított szakasznak az eredeti szakasszal megegyező számú pontja van. De az is: a nullahosszúságú szakasznak is végtelen sok pontja van. De milyen valódi létező nagyítja önmagát? Itt valamit nem tisztáztunk kellően. A *spidron* geometriában ezért kezdenek el csavarodni nagyítás közben a vonalszakaszok. Úgy tűnik, a Világ nem invariáns a nagyságrendváltásra (nagyításra), különben azonos modellben jeleníthetnénk meg a *makro*világot és a *mikro*világ kvantumfolyamatait is.

A Napkorong, mint őskör. A lemenő Nap aranyló sugarainak útja egy lombos fa zöld levelei között, nyárfavirágzáskor, ellenfényben a tejfehér ködszerű levegőben, mint ősegyenes. A kékes színű tó felszíne, mint őssík. A szőlőszem, mint ősgömb. A gömb körszerű árnyéka a fényben, megfelelő árnyéksíkban. Ezek a geometria ősképei. Az ember kezdetben mit sem tud a szellem dimenzió látvány mögötti axiómáiról. Például az embert hordozó ötvenedik nagyságrendet átható theorémáról, mely szerint azonos térfogatú testek közül a gömb felszíne a legkisebb, így a felület megteremtésén munkálkodó erők a Nap vagy a vízcsepp esetében legkevesebb energiával a gömbfelszínt alkothatják meg. A megismerő szubjektum a számára megnyilvánuló következmény szint elemeit véli alapvetőnek.

Azzal kellene kezdenünk, hogy megfogalmazzuk a megnyilvánult fizikai „őstér” (ismeretlen) ősposztulátumait, majd kinyilvánítjuk a >>teremtő aktust<<. Az ily módon megnyilvánult őstérnek létrejönnek az őshelyei, melyekbe anyagi pont individuumok helyezhetők. Elképzelhetjük az őstéret függetlenül az anyagi őspontól, az anyagi őspont szabad mozgását biztosító, lehetséges üres ősszínpadként. Az anyagi őspont létezésétől függetlenül, megkerülve a pontból fejlesztendő tér problematikáját, az „őstér-geometria” tulajdonságai – úgy véljük - megragadhatók.

Rosszabb a helyzet, ha az anyagi őspont teremti meg a teret. Ilyen ősképeink nincsenek! Egy ilyen úton kezdetben csak spekulatív módon haladhatunk! Elképzelhető például egy olyan teremtő aktus, amelyben az őstér – saját transzcendens mozgásformájában – egy ismeretlen kényszer hatására speciális struktúrát vesz fel, majd egy szintén ismeretlen eredetű erő nagy mennyiségű energiát feszít az őstérnek. Ezt az akaratot folyamatosan fenntartva az energia a transzcendenst formálva, anyagként „buggyan” ki az őstér meghatározott pontjaiban, mint az apró izzadságcseppek az emberi epidermiszen.

Létezzen most a háromdimenziós (?) őstér (?), még azelőtt, hogy belehelyeznénk az anyagi őspontot. Tegyük fel, az őstér ismeretlen ősposztulátumai garantálják, hogy az őstér ne legyen üres, és létezzen benne vonal is. Ebben az esetben kertelés nélkül úgy posztuláljuk a vonalat, mint az őstér olyan individuális pontsokaságát, amelynek egyetlen pontjából sem lehet szomszédos saját pont felé háromféle különböző irányban mozdulni. A harmadik irány ugyanis a vonalnak „szélességet” adna.



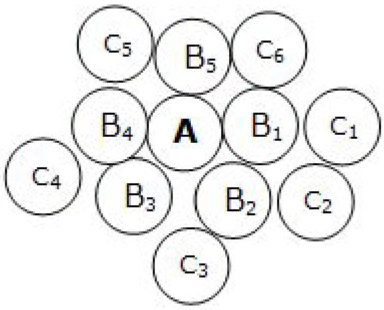
A vonal ezen új definíciója kétségtelenül elegáns! Megkerültük a szélesség és a hosszúság nehezen definiálható fogalmait. A korábban felmerült problémák ennek a „kész” geometriájú térnek a feltételezésével azonban nem oldódtak meg. Továbbra is az a kérdés: mi ennek a térnek a geometriája? Mit enged meg és mit nem? Csupán az történt, hogy az eddigi homályos fogalmainkat lecseréltük… három új, legalább ugyanolyan homályos fogalomra! Az új fogalmak: *irány*, *szomszédos* pont, *mozgás*.

Mit jelent: >>irány<<? Kant filozófiájának egyik műszavát használva mondhatnánk: az >>irány<< az őstér *a priori* attribútuma, hozzátartozik az őstérhez. Ezzel a kijelentéssel azonban az irány fogalmának meghatározását nem váltottuk ki. Ha van valamiféle „élet” őstérünkben, legyen az absztrakt vagy valódi, az irány fogalma által lefedni gondolt attribútumnak csak akkor van értelme, ha megnyilvánul az aktuálisan létező élet számára. Ebben az esetben viszont van olyan esemény, melynek végkimenetele nem invariáns az irányra nézve (például egy adott elrendezésű molekula optikai forgatóképessége révén máshogy emittálja a rázúduló fotonokat, mint a vele tükörszimmetrikus irányítású szomszéd molekula). Ezt a „hatóerőt” tehát, mint térbeli lehetőséget, formalizálni kell!

Ha egy ponton belül létezhet dimenzió nélküli belső struktúra, gazdag életet élhetünk irány és elmozdulás nélkül is. Ugyanakkor, ha nincs irány, nincs külsődleges térbeli struktúra sem. Az anyagból építkező állandósághoz viszont terebélyesség kell, amelyben elférhetnek az anyagi struktúrák! Ha a struktúrákat vezérelni is akarjuk *okság-elv* is kell. Az oksági láncolatok közös burkoló felületeként pedig megjelenik az *idő*.

Az energia, mint egy rezonátor üregbe zárt hullám van jelen az Univerzumban. Valószínű a rezgések saját állapotai nem elég sokszerűek és tartósak, így nem alkalmasak az >> állandóság<< fenntartására. Kell valami kevésbé mozgékony és nehézkes: ez az >> anyag<<. Az >>élet<< az anyagi >>állandóságon<< felépült >>alanyiság<<.

Mit jelent: >>szomszéd<<? Az alábbi egyszerű ábrán keressük „*A*" szomszédjait.



A feladatunk egy olyan absztrakt viszony meghatározása az egyes elemek között, amely teljesíti a „hétköznapi értelemben" vett szomszédsági viszonnyal kapcsolatos elvárásainkat. A szomszédság közelséget, pontosabban legközelebbiséget jelent és ezáltal a szomszédok között, ha valami továbbítható, az a leggyorsabban továbbítható. Ha a *közvetlen érintkezés*t tekintjük a szomszédsági viszony alapjának, A-nak szomszédja B_1, B_4 és B_5. De pontok esetében mit jelent: >>érintkezés<< ? És mit mondjunk a tér B_2 pontjáról?

Definiáljuk a *bejárás* fogalmát:

legalább egy elemű véges betűsorozat, amelyben két vagy több betű előfordulása esetén bármely két egymás mellett álló betű a tér szomszédos pontjait jelöli, továbbá a betűsorozat egyetlen betűje sem ismétlődik;

Nyilván teljesülnek a következők:

a kizárt ismétlődés miatt nem lehet hurok, és visszalépés sincs;

egy bejárás bármely összefüggő része is bejárás.

Bejárás például az A, B_1, C_6, és bejárás *A* is.

Definiálunk a bejárásokon egy *tulajdonságot* is, mely teljesíti a következőket:

$\mathbf{T}[P_1,\ldots P_i,P_{i+1},\ldots P_j] = \mathbf{T}[P_1,\ldots P_i] + \mathbf{T}[P_{i+1},\ldots P_j]$, azaz ha egy $j\geq 2$ elemű bejárást kettébontunk az i-edik eleménél, $j>i\geq 1$, akkor a tulajdonság additív a bejárás részbejárásain, illetve

$\mathbf{T}[P_i,P_{i+1}] > 0\ \forall i.$

Ha T tulajdonság a tér bármely, nemcsak bejárható pontpárjaira értelmezhető, előfordulhat, hogy $\mathbf{T}[A,B_2] < \mathbf{T}[A,B_1]$. A definíció miatt viszont: $\mathbf{T}[A,B_2] \equiv \mathbf{T}[A,B_1,B_2] > \mathbf{T}[A,B_1]$. Ez súlyos ellentmondás. (Terünk nem örvénymentes a **T** tulajdonságra.) Ráadásul mi történjen a nem lefedett részekkel?

Mit jelent: >>mozgás<<? A mozgás kétségtelenül feltételezi az *idő* entitás jelenlétét. A geometria absztrakt világában azonban sem megvalósult objektumok, sem idő, sem gravitáció, sem fény nincs! Szigorú értelemben véve ezért értelmetlenek a következő kijelentések: *Rajzoljunk* egyenest... ; *Először* felezzük a szakaszt, *majd* állítsunk merőlegest a felezéspontban...; az egyenes legyen *vízszintes*...; A szakaszok egyenlősége jól *látszik*... stb. Az irány, szomszéd, bejárás fogalmai feltételezik a mozgás, és ezáltal a „távolságnak lenni" lehetőségét. Bármely ehhez hasonló „továbbíthatóság" fogalom létezése csak az >>idő<< jelenlétében értelmezhető. Próbáljunk tehát valami olyan viszonyt kitalálni, amelyben az idő eliminálása után is *A* különbözőképpen tud viszonyulni B_1-hez, mint C_1-hez. A „*V*iszony" legyen ráadásul leképezhető egy rendezett $\mathcal{H}$ halmazba, azaz egyértelműen létezzen bármely (A_i, B_j) pontpárra $V(A_i, B_j) \in \mathcal{H}$! Ekkor, ha $V(A, B_1) < V(A, C_1)$, mondhatjuk: ' B_1 „közelebbi" viszonyban van *A*-val, mint C_1 '. Továbbá, ha $\neg\exists P_i$, $P_i \neq A$, melyre $M(A, P_i) < M(A, B_1)$, akkor *B1 szomszédja A*-nak... . De mi lenne ez a bizonyos titokzatos *V* viszony? Amíg nem sikerül válaszolnunk a feltett kérdésekre definícióink továbbra is nyugtalanítóan bizonytalanok!

Egy absztrakt tér kialakulása

Egy új absztrakt geometriai világot igyekszünk megalkotni, akár *Euklidész*, azonban alap-objektumait nem definiáljuk. El akarjuk kerülni azokat a kellemetlenségeket, amelyeket az *Elemek* tárgyalása során átéltünk. A *Pont*, az *Egyenes*, a *Sík* tehát nem definiált alap-objektumok lesznek ebben az absztrakt világban! Megnevezésükkor bármire gondolhatunk.

Jelük a megnevezés sorrendjében így akár lehetne: ■ ■■ ■■■

Bevezetünk a nem definiált objektumok között egy relációt, azaz egy közöttük fennálló viszonyt, neve: *Illeszkedés*. Ezt a relációt sem definiáljuk! Ha e (egyenesre) „illeszkedik” P (pont), ezt így jelöljük: *I(e,P)*. Vagy akár így: ■■ ♥ ■

Absztrakt világunk felépítését rögtön posztulátumok megfogalmazásával kezdjük. Azt reméljük, a posztulátumokban megfogalmazott elvárásaink elkezdik majd árnyalni objektumaink viselkedését és ezáltal közvetve megmutatkozhat különösségük.

Bármely két pontra illeszkedik egy és csak egy egyenes (P1)

A pontok megkülönböztethető, beazonosítható individuális létezők, különben nem beszélhetnénk *két* pontról. Távolság vagy hely fogalom még nincs bevezetve, így a pontok megkülönböztetéséhez a „helyzet” fogalma nem használható. Az egyenesek is hasonlóan megkülönböztethetők, egyébként a „csak egy” kitétel nem lenne értelmezhető. A pontokat valamilyen sajátságuk alapján tehát megkülönböztetjük, miközben egy tér-idő nélküli virtuális világban lebegnek. A kiszemelt két pont és egy egyenes nevű objektum kizárólagos kapcsolatba kerül.

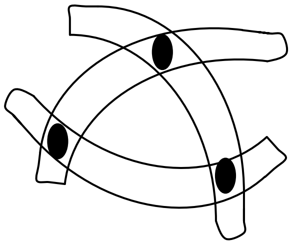
Bármely egyenesre illeszkedik legalább két pont (P2)

Az első két posztulátumból közvetve kiderül, az illeszkedési viszony egy *beágyazó* objektum attribútuma! Ha megfogok egy tárgyat, a tárggyal „megfogás” viszonyba kerülök. A tárgy azonban nem fogott meg! A megfogás viszony nem lehet kölcsönös, mert sajátosan következik emberi mivoltomból. Kölcsönös viszony lehet a tárggyal például az „érintkezés”, ez azonban a beágyazó tér különösségéből fakad: az objektumoknak határa van, és ezek *közeledhetnek*, mert van idő és tér, van *mozgás*. A pontra illeszkedő egyenes, illetve az egyenesre illeszkedő pont illeszkedés viszonya a posztulátumok szerint nincs megkülönböztetve, így nem folyhat az egyes objektumok különösségéből. Mindazonáltal, amíg ez nincs expressis verbis kimondva, a különösségből $I(e,P) \neq I(P,e)$ következik.

Az eddigiek sajnos nem biztosítják, hogy legyenek pontok és egyenesek egyáltalán. Ha mégis létezne pontosan egyetlen pont, a második posztulátum miatt nem létezhetne egyenes. Ha létezik egyenes, van két pont is a világban, de az első posztulátum ezek után is legfeljebb további egy objektum létezését kényszeríti ki.

Van három nem egy egyenesre illeszkedő pont (P3)

Megjelenik egy egzisztencia posztulátum! Innentől bizonyosan nem a semmiről beszélünk. Úgy tűnik univerzumunk legalább hat szereplős: van három *pont* (?), és az ezekkel *illeszkedés* (?) viszonyban lévő pontosan három *egyenes* (?).



Ha csak azt posztuláltuk volna, hogy létezik három pont, ebből *P1* miatt következne, hogy létezik legalább egy egyenes is. Több egyenes létezése azonban nem feltétlenül lenne biztosított, ugyanis *P2*-ben a *legalább* szó megengedi, hogy a *P1*-ben „felhasznált" két ponttól különböző harmadik pont is illeszkedhessen a talált egyetlen egyenesre.

P3 közvetve egy egyenest is rendel a három ponthoz – mint valamiféle mérőeszközt -, amely *P1* miatt biztosan létezik, és amely egyenesre nem illeszkedik mindhárom pont. Nincs és egyelőre nem is lehet semmilyen elképzelésünk arról, mennyire viselkednek egységesen a különböző egyenesek. Mi történne akkor, ha a „mérőeszközként" használt egyenestől különböző minden további egyenes viselkedése „deviáns" lenne, azaz rájuk mégis illeszkedne mindhárom pont? Nos, ez nem fordulhat elő! *P1* szerint az említett három pontból valamely kettő meghatározza az illeszkedés tényét. A feltételezett „deviáns" egyenesek mindhárom pontra illeszkedve az említett két pontra is illeszkednek, így *P1* „… egy és csak egy…" kitétele miatt azonosak a harmadik posztulátumban említett egyenessel. A nem egy egyenesre illeszkedés tehát nem egy kitüntetett egyenes különlegességén, hanem a három pont viszonyának különlegességén múlik.

Bármely három nem egy egyenesre illeszkedő pontra illeszkedik egy és csak egy sík (P4)

Legalább egy új létezővel gyarapodott absztrakt univerzumunk.

Egyetlen sík sem az üres halmaz (P5)

A megfogalmazásban kényelmi szempontokat figyelembe véve éltünk az „*üres halmaz"* szóhasználattal. Ebben az esetben azonban meg kell magyarázni az *üres*, a *halmaz* illetve az *üres halmaz* fogalmakat. Azt is tisztáznunk kell, hogy milyen kapcsolatban van a halmazelmélet „*tartalmazás*" viszonya a posztulátumokban említett „*illeszkedés*" viszonnyal. Az előbbieket elkerülendő, mivel egy síkot három nem egy egyenesre illeszkedő pont határoz meg egyértelműen, helyesebb ha *P5*-öt úgy fogalmazzuk meg, hogy a *P4-P5* posztulátum pár megfogalmazásában a *P1-P2* pár analogonja legyen: *Bármely síkra illeszkedik legalább három nem egy egyenesre illeszkedő pont.*

Ahogy az első két posztulátum sem biztosította a „tér” „dimenziójának” növelését egyről kettőre, úgy a *P4-P5* pár sem biztosítja a dimenzió növekedését kettőről háromra.

Az illeszkedés antiszimmetriája

Ha egy egyenes két pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes is illeszkedik a síkra (P6)

Az eddigiekben öt féle illeszkedési viszony létezését juttattuk kifejezésre: *I(P,e), I(e,P), I(P,S) , I(S,P) , I(S,e).* A formalizmusban a zárójel második tagjaként jelzett objektum illeszkedik az első helyen megjelölt objektumra.

P6-ot ezek után így is interpretálhatjuk:

Ha $I(S, P_1)$ és $I(S, P_2)$ és $I(e,P_1)$ és $I(e,P_2)$ akkor I(S,e).

A rövidebb jelölés érdekében felhasználjuk a logikai *és* $\wedge$ jelét, továbbá a logikai *következés* (akkor) $\Rightarrow$ jelét. A pontokra vonatkozó illeszkedési relációk jelöléseit összevonva:

$$I\ (S;\ P_1,P_2) \quad \wedge \quad I\ (e;P_1,P_2) \quad \Rightarrow \quad I(S;e).$$

Ha formálisan megcserélhetnénk $I(e;P_1,P_2)$ reláció jelzésében a két oldalt így: $I(P_1,P_2;\ e)$, akkor a következő kifejezést kapnánk:

$$\mathbf{I\ (S;\ P_1,P_2) \quad \wedge \quad I\ (P_1,P_2;\ e) \quad \Rightarrow \quad I(S;e).}$$

Ez nagyon hasonlítana a következő formulára:

Nagyobb(2;8) $\wedge$ Nagyobb(8;11) $\Rightarrow$ Nagyobb(2;11).

Általánosan:

Nagyobb(a;b) $\wedge$ Nagyobb(b;c) $\Rightarrow$ Nagyobb(a;c).

Szavakkal: ha b nagyobb a-nál, és c még b-nél is nagyobb, biztos, hogy c nagyobb a-nál. Ezt a nagyobb viszony tranzitív tulajdonságának, azaz a viszony konzekvens átöröklődésének nevezzük. Nem minden viszony öröklődik:

Üldöz(kutya; macska) $\wedge$ Üldöz(macska, egér) $\not\Rightarrow$ Üldöz(kutya; egér).

Egy formális jelsorozat két oldalát könnyű felcserélni. Egyszerűen fordított sorrendben írjuk le a jelsorozat elemeit. Ugyanakkor, ha a jelsorozat elemei helyzetének jelentéstartalma van, már meggondolandó, hogy a csere értelmileg helyes-e! Így tehát meg kell vizsgálni, vajon az $I(e;\ P_1,P_2)$ - $I(P_1,P_2;\ e)$ formális csere értelmezhető-e! Igaz-e, hogy a *P1*-ben említett *e* egyenest meghatározó *A* és *B* pont *P2* értelmében illeszkedik az *e* egyenesre? Sajnos nem! **Egy *A* és *B* pontra illeszkedő *P1* szerint egyértelműen meghatározott *e* egyenesre *P2* szerint illeszkedő legalább két pont nem feltétlenül *A* és *B!*** Azaz abból, hogy egy egyenest *A* és *B* határozott meg, nem következik, hogy *A* és *B* pontjai az egyenesnek! Ez első hallásra igen meglepő.

Ha kissé pontatlanabbul fogalmazunk, még meglepőbbé tehetjük az állítást: **Nem bizonyítható, hogy az *A* és *B* pontokon fekvő *e* egyenesen *A* és *B* rajta fekszik!** A pontatlanság egyben útmutatás is. A „*rajta fekszik*” kifejezést nem használhatjuk, hiszen sem a „*rajta”* szót sem a „*fekszik”* szót nem definiáltuk! Az ellentmondást az okozza, hogy szemléletünk szerint a valamin feküdni érintkezést jelent, az érintkezés pedig szimmetrikus reláció. Ha tehát az egyenes az *A* ponthoz ér, nyilván *A* pont is az egyeneshez ér! Az eddigiekben azonban csakis egy „illeszkedik” nevű relációt definiáltunk, amiről egyetlen eddigi posztulátumban sem mondtunk ki semmilyen tulajdonságot, így azt sem, hogy szimmetrikus.

Megmenthetjük az illeszkedésre felismert eddigi egyetlen tulajdonság, a tranzitivitás létét. A hatodik posztulátumot egy kicsit óvatosabban kell megfogalmaznunk a felismert viszonyok tükrében:

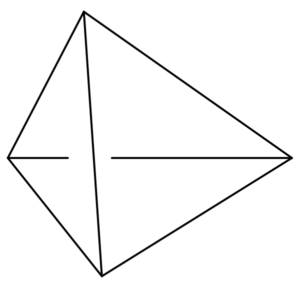
Ha két pont illeszkedik egy síkra, akkor a két pontra illeszkedő egyenes is illeszkedik a síkra

$$\mathbf{I\ (S;\ P_1,P_2)\quad \wedge \quad I\ (P_1,P_2;\ e)\quad \Rightarrow \quad I(S;e).}$$

A két megfogalmazás közötti különbség nüansznyi, látszólag érdektelen. Mégis, az utóbbi megfogalmazás nem az előbbi átfogalmazása, hanem teljesen új megközelítést nyújtva már a posztulátum szintjén garantálja az illeszkedés tranzitivitását, míg az előbbi nem. Ez a lényeges különbség mindaddig fennáll, amíg az illeszkedés szimmetria tulajdonságáról nem nyilatkozunk! Az is látszik a tranzitivitásnak nem következménye a szimmetria. És az is látszik, mennyire nehéz kizárni a szemléletből folyó rejtett feltételezéseket.

A további két illeszkedési posztulátumot csak a teljesség kedvéért közöljük: *Ha két síknak van közös pontja, akkor további közös pontjuk is van (P7); Van négy nem egy síkra illeszkedő pont (P8)*

Az utóbbi posztulátum garantál egy tetraéder alakú „pálcika” világot, legalább négy „síkkal”, négy ponttal és hat kétpontú „egyenessel”.



Mindezek után megpróbáljuk élettel megtölteni új világunkat. Bevezetünk négy axiómát, kezdve a mérték axiómával:

Az illeszkedési sík bármely egyenesére igaz, hogy van olyan kölcsönösen egyértelmű leképezés, amely ezen egyenesre illeszkedő bármely ponthoz egy valós számot rendel. (A1)

A kölcsönös egyértelműség azt jelenti, az egyenesre illeszkedő minden ponthoz pontosan egy számot rendelünk, és különböző pontokhoz különbözőt.

Ennek segítségével bevezethetjük a távolság fogalmat az egyeneseken és ezen keresztül a teljes térben is: $I(e;P_1,P_2)$ esetén $d(P_1,P_2)$ távolság $|f(P_1)-f(P_2)|$ lesz, ahol *f* jelképezi a kölcsönösen egyértelmű leképezést, $f(P_i)$ pedig a P_i ponthoz rendelt valós számot.

Mivel a valós számok halmaza egy jól strukturált halmaz, így egyeneseink is azonnal jól strukturáltak lesznek, azaz minden a valós számok körében megfogalmazott tétel által biztosított „tényállás" „átszármazik" egyeneseink új világába.

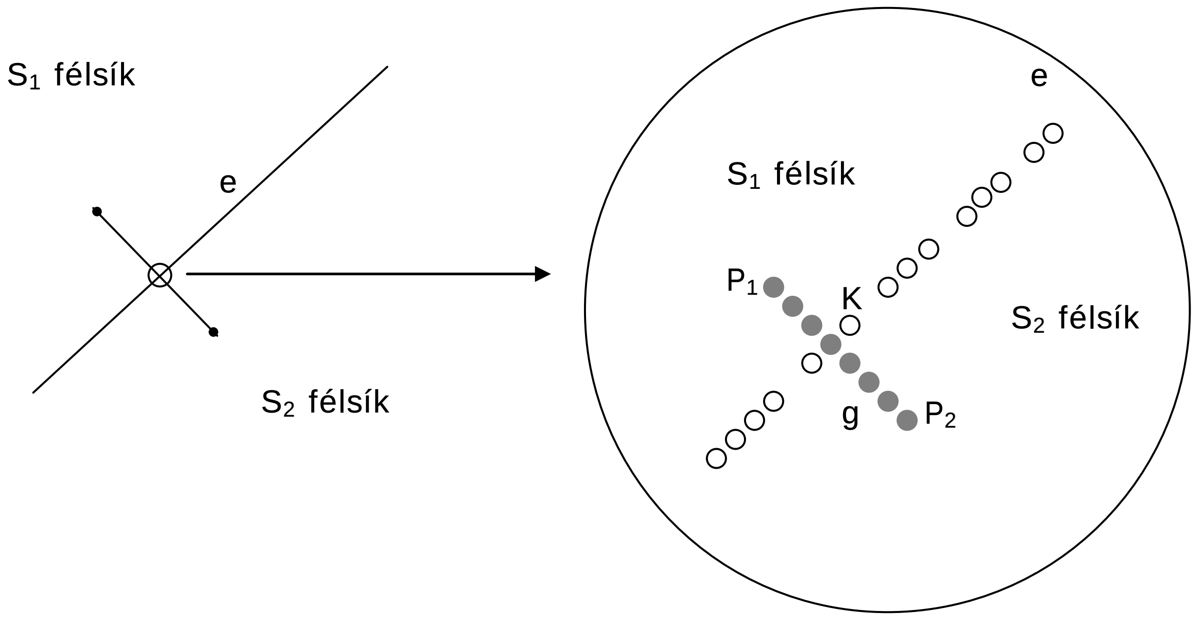
A mérték axióma bevezetése egy elemi erejű robbanáshoz hasonlítható. Ezzel a rövid, ártatlannak tűnő mondattal ugyanis szerényen felruháztuk készülő absztrakt terünket az elmúlt tízezer évben megvalósított matematikai absztrakciók nyújtotta strukturális képességek majdnem teljes tárházával!

Készülő terünk modellje terünk kész modellje, azaz önmaga, hiszen a valósak halmaza „sűrítve" modellálja terünket.

A teremtés mozzanatát most sem tudtuk megragadni. Ahogy a semmiből, a kiterjedés nélküli pontból, valami lesz, egy kiterjedéssel bíró egyenes, nos, ennek a csodának a megragadása megint elmaradt. *A mérték axióma ebben az összefüggésben az elfedett csoda.* Mivel a valós számok és az Euklidészi egyenes pontjai között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető, mindkét modell azonos módon marad adós a csoda megfejtésével.

A valós számok strukturális beemelése az egyeneseken jól rendezett lokális viszonyokat teremt. Nem fordulhat elő például, hogy egy „sövényen túli" ponttal a sövény innenső oldalán találkozzam, azaz ha P pont az A kezdőpontú AB félegyenes AB szakaszon kívüli, A pontból nézve B ponton túli eleme, A-ból indulva előbb mindenképpen a „közelebbi" B ponttal kell találkoznom P felé >>mozogva<<.

Mi történik azonban diszlokálisan? Mi történik, ha kiléphetünk a síkba? Előfordulhat-e, hogy egy *e* egyenessel kettévágva a síkot az egyik félsík P_1 pontjából úgy juthatok el egy *g* egyenes mentén a másik félsík P_2 pontjába, hogy nem „érintem” a kettéosztó egyenest? Megkerülhetem-e a kettéosztó egyenest *e* egyenes mentén a „végtelen” felé haladva? „Felpenderedik”-e valahol a „sík” annyira, hogy az egyik félsík „áthajlik” a másik félsíkba a kettéosztó vonal felett? (és akkor már nem is félsík a félsík) Előfordulhat-e, hogy a sík egy „kritikus” *K* pontjánál valamilyen irányban haladva nem kellően sűrűn lefedett a sík és „átbújhatok” a túlpartra?



A kétségek kizárása érdekében kimondjuk a második, folytonossági axiómát:

Ha egy síkot egy rá illeszkedő e egyenessel két félsíkra bontunk, akkor a különböző félsíkokra illeszkedő tetszőleges P_1 illetve P_2 pontok által meghatározott g egyenesre illeszkedik olyan pont, amely e egyenesre is illeszkedik. (A2)

Nem lehet tehát az egyik félsíkból a másikba úgy közlekedni, hogy ne mennénk át a félsíkok határvonalán. Mivel ez bárhol, bármely egyenesre és bármely pontpárra igaz, azt mondhatjuk a sík pontokkal való fedettségének sűrűségeloszlása adott helyen homogén, továbbá független az iránytól is, azaz izotróp. *A sík tehát lokálisan sehol sem „lazaszövésű”!*

Ez az axióma jóval tágabb horizontú eddigi egzisztencia posztulátumainknál. Ha lehet fokozni egyáltalán a teremtés aktusát, itt mindenképpen ez történik, ugyanis a teremtettek egymáshoz való viszonyát adjuk meg egy szigorú strukturális szabályosság keretei között. A teremtett individuumoknak futtató környezetet teremtünk.

Egy újabb egzisztencia posztulátumot és két további axiómát fogalmazunk meg, lezárva ezzel a „sík" (illetve a „tér") felépítését. Elvárásaink komplexitásukban felül fognak múlni minden eddigit.

A mérték axióma biztosítja ugyan, hogy egyeneseinken megjelenjen a távolság fogalom által garantált jól strukturált entitás, azonban teljes bizonyossággal egyelőre csak annyit állíthatunk, három darab kétpontú egyenes van biztosan jelen a síkon!

Az illeszkedési sík tetszőleges egyenesére illeszkedő tetszőleges ponthoz megadva egy tetszőleges valós számot, létezik olyan, az említett egyenesre illeszkedő egy és csak egy pont, melynek távolsága az eredetileg említett ponttól éppen a megadott valós szám. (A1-P)

Ha a mérték axióma bevezetése robbanás volt az „szellem dimenzióban", akkor eme posztulátum még nagyobb robbanás a „megvalósulás dimenzióban"! A hat biztosan létező síkbeli ponthoz egy csapásra végtelen számú új pontot teremtettünk.

Kiszemelve egy egyenesre illeszkedő, *P2* szerint biztosan létező két pont egyikét P_0-t, *A1* a következőt garantálta:

Ha ($\exists$ **P**, I(e;P), I(e;P_0)) $\Rightarrow$ ($\exists$ **r**, $r \in \mathcal{R}$ $|f(P)-f(P_0)|=r$)

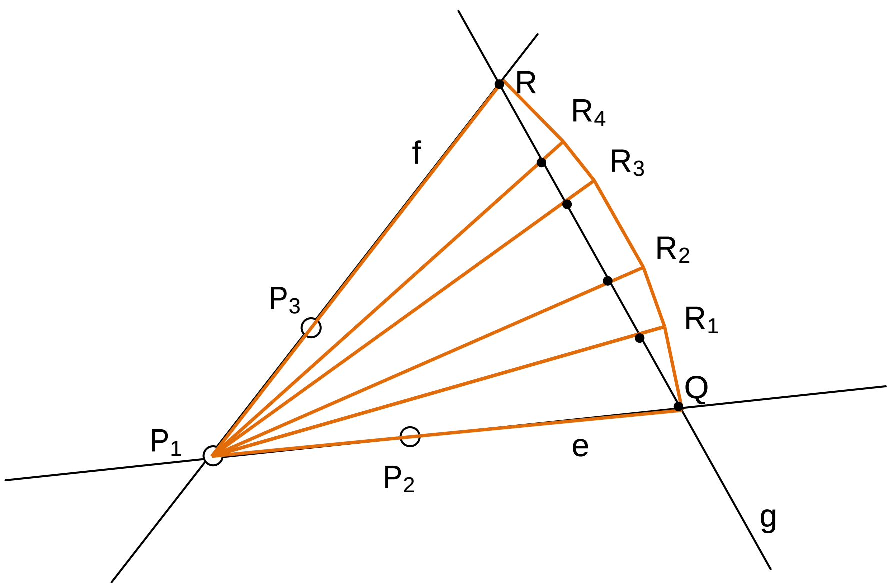
azaz a létező pontokhoz létezik mérték. *A1-P* viszont a következőt garantálja:

($\forall$ P_0 , I(e;P_0), $\forall$ **r**, $r \in \mathcal{R}$) $\Rightarrow$ ($\exists$**!** **P**, I(e;P), $|f(P)-f(P_0)|=r$)

azaz minden mértékhez létezik pont!

Vannak-e görbe vonalak?

A következő axióma kimondása előtt, melyben síkszögekkel akarunk operálni, meg kell vizsgálni, vannak-e síkszögek, és ehhez kapcsolódóan van-e egyáltalán görbe vonal a síkon? Továbbá jó lenne tudni, lehet-e „kanyarban" távolságot mérni, azaz görbe vonal mentén, hiszen erről eddig nem esett szó!



Legyenek *P3* alapján adottak a P_1, P_2, P_3 pontok. A $P_1 - P_3$, illetve a $P_1 - P_2$ pontokra *P1* szerint illeszkedő *f* és *e* egyenesekre *A1-P* szerint illeszkednek olyan R és Q pontok, melyekre legyen $d(P_1,R) = d(P_1,Q) = r$, ahol r tetszőleges, előre meghatározott valós értékű sugárhossz. Az R – Q pontokra *P1* szerint illeszkedő *g* egyenes *A1-P* szerint létező tetszőleges számú belső pontjára illetve a P_1 pontra *P1* szerint illeszkedő egyeneseken *A1-P* szerint léteznek az R_1, R_2, R_3, R_4 pontok, melyekre $d(P_1,R_1) = d(P_1, R_2) = d(P_1, R_3) = d(P_1, R_4) = r$. Ekkor a Q R_1 R_2 R_3 R_4 R töröttvonal hossza, mint egyenes darabok mentén mért távolság összeg *A1* szerint létezik, és közelíti a szemlélet alapján körívnek gondolt, a Q R_1 R_2 R_3 R_4 R töröttvonal szakaszhatároló pontjait tartalmazó, $QR_{ív}$-el jelölt ív hosszát. Ha a vázolt eljárásban a QR szelő belső pontjait minden határon túl közelítjük egymáshoz, *a keletkező szakaszok P_1-től r távolságra létező R_i pontjaiból határhelyzetben a szemlélettől függetlenül (!) előáll maga a körív*, és hossza az eljárás során kialakuló töröttvonal sorozat hosszainak határértéke lesz.

Ezek után rögzített r mellett az RP_1Q szögtartományhoz kölcsönösen egyértelmű módon hozzárendelhetjük a QR ív hosszát mértékként. Ezt így jelöljük: $m(RP_1Q\angle) = l(QR_{ív})$. Most már kimondhatjuk a közös kezdőpontból induló félegyenesek határolta síktartományok mértékére vonatkozó axiómánkat:

Az illeszkedési sík tetszőleges szögtartományának mértéke egyenlő a szögtartományt alkotó bármely két szomszédos szögtartomány mértékének összegével. (A3)

A fentebbi rajz jelöléseivel az axióma alakja:

$m (RP_1Q\angle) = m (RP_1R_i\angle) + m (R_iP_1Q\angle)$.

Az első és második axióma együtt a sík egyes pontjaiban biztosítja a sík "sűrű szövését", a harmadik axióma pedig azt biztosítja, hogy a szövés sűrűsége ne ingadozzon, miközben körbejárunk egy pont körül. *A mérték tehát forgás invariáns!*

Nem rendelkeztünk még arról, mi történhet a mértékkel különböző, esetleg egymástól távoli koncentrikus körökön. *A hármas axióma biztosítja az egyes különböző sugarú köríveken körbejárva a forgásinvarianciát, de azt nem, hogy a különböző köríveken azonos legyen a mérték.* Ezért kimondjuk utolsó axiómánkat:

Ha két különböző, nem egy egyenesre illeszkedő ponthármas illeszkedik a síkra és egymásnak megfelelő pontjaik távolsága egyenlő helyi mértékük szerint, akkor ezek a távolságok a sík bármely helyének mértéke szerint egyenlőek. (A4)

A kimondott posztulátumok és axiómák segítségével a klasszikus geometria összes fogalma bevezethető az ismert tulajdonságokkal. Ha a ponthármast háromszögnek nevezzük, az axióma a szemlélethez közel állóbb módon is kimondható: *Ha két távoli háromszög egybevágó eltolással fedésbe hozhatók.*

A síkon bevezetett mérték, amely meghatározza a síkon érvényesülő geometriát, nemcsak forgás-invariáns tehát, hanem eltolás-invariáns is.

Ha meg akarjuk mérni a sík egy adott helyén elhelyezkedő szakasz hosszát, „oda kell mennünk” és egy helyi, vagy odavitt méterrúddal (mértékkel) meg kell mérnünk. A negyedik axióma arról rendelkezik, hogy elmozdítva a szakaszt a síkon, majd újra megmérve azt új helyén, ottani mérték szerint, azonos eredményre kell jutnunk az előző méréssel. A szakasz nem „hízhat” vagy „soványodhat” mozgatás közben (és a sík „szövése” sem teheti ezt meg)! Azt gondolhatjuk, ha magunkkal visszük a méterrudat és egy pillanatra sem engedjük kezünkből, nem is fordulhat elő ilyesmi. Az axióma így értelmetlennek látszik. A síkot azonban egy ismeretlen varázs-síknak kell felfognunk, ahol törpévé vagy óriássá válhatunk, anélkül, hogy ezt mi magunk a varázs-sík belsejében haladva észrevennénk. A varázs-síkon haladva környezetünk minden elemének, így a méterrudunknak is - és mi magunknak is - egyenletesen csökkenhet a mérete, így semmi gyanúsat nem észlelünk. Csak a téren kívüli, távoli szemlélő vakarja a fejét. A relativitás elmélete megmutatja, hogy egy fizikai tér képes lehet ilyen anomáliára. Végül, ha az az ötletünk támad, hogy a biztonság kedvéért mégsem mozgunk a varázs-síkon, inkább optikai úton mérünk, nos, a varázslatot - ha van varázslat – akkor sem kerülhetjük el: az információt hordozó fotonoknak ugyanis mindenképpen meg kell járnia a varázs-síknak azt a helyét, ahol szakaszunk van!

Úgy gondoljuk, mérték axiómáinkkal olyan erős kényszerfeltételeket teremtettünk, hogy most már semmilyen meglepetés nem érhet új absztrakt síkunkon mozogva. Ki is próbáljuk az új síkot. Elindulunk egy hosszú-hosszú egyenes mentén a síkon, az egyenes egy kiszemelt *A* pontjától folyamatosan távolodva. Nagyon-nagyon sokáig haladunk, újabb és újabb „tájakat” fedezünk fel, majd egyszer csak megpillantunk a távolban egy pontot. Ahogy közeledünk hozzá legnagyobb megdöbbenésünkre - semmi kétség - felismerjük a közeledő pontban a korábban elhagyott *A* pontot !?

A mérték axiómák Euklidésznél is hasonló szerepet töltenek be, mint Hilbertnél. Most már értjük Euklidész „furcsa” axiómáit:

Az egymásra illeszkedők egyenlők.

Ugyanannak fele részei egyenlők egymással.

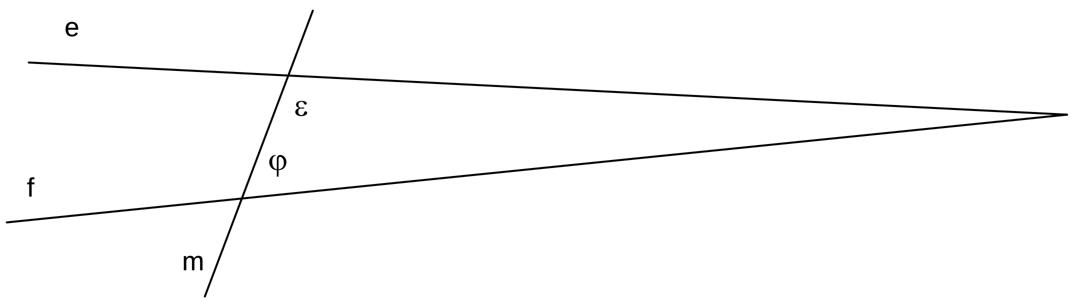
Az egész nagyobb a résznél.

Azt gondolhatjuk, a tér egy elhagyatott, kellékek nélküli teátrum, üres színpad, maga az Üresség. A tér valójában evilági élő organizmus, mint entitás „hozzáépül” a látszólag tőle független térbeli entitásokhoz, ahogy az idő is. Ha tehát mozgunk, a térben mássá válunk! Visszamozogva „kiinduló” helyzetünkbe sem lehetünk már ugyanazok. Ha a biztonság kedvéért egyhelyben maradunk, akkor sem. A táguló univerzum téridejében Napunk másodpercenként 280 kilométerrel arrébb ránt. Korábbi pillanatbeli énünk örökre elveszett. Esti lefekvésünktől reggelig, Föld-űrhajónk 8 millió kilométert repül, már nem mi ébredünk fel! A tartalmazó tértől függetlenül elképzelt mozgás, melynek során automatikusan megőrződik az alanyiság, nem létezik. Euklidész és a nagyszerű Bolyai is feltételezik a térbeli tartományok sérülésmentes mozgathatóságát.

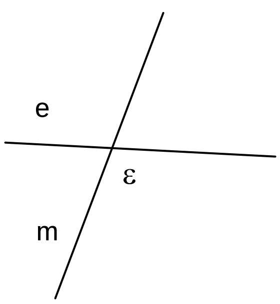
Lokális párhuzamosság az Euklidészi térben

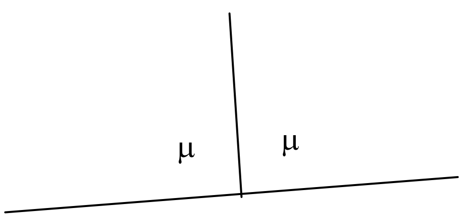
Euklidész első könyvének 23. definíciójában két, egymáshoz képest speciális helyzetű egyenest határoz meg a síkban: *Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak, és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak.*

A definícióhoz csatlakozva ezután megfogalmazza nevezetes párhuzamossági posztulátumát, melyet a derékszög [R] fogalmára épít: *Követeltessék meg, ha két egyenest egy harmadik úgy metsz, hogy a metsző egyenes egyik oldalán keletkező belső szögek két derékszögnél kisebbek* [$\varepsilon + \varphi < 2R$], *akkor a két egyenes végtelenül meghosszabbítva találkozzék ezen az oldalon*.



A szög fogalmát az *Elemek* I könyvének 8. és 9. definíciója, a derékszög fogalmát a 10. definíció vezeti be: *Az egyenesvonalú síkszög olyan egysíkbeli egyenesek* [e, m] *egymáshoz való hajlása* [ε], *melyek metszik egymást*; *Ha valamely egyenesre egyenest állítunk úgy, hogy egyenlő mellékszögek keletkeznek* [μ], *akkor a két egyenlő szög derékszög, és az álló egyenest merőlegesnek mondjuk arra, amin áll.*





A 11. definícióból megtudjuk azt is, egy szög lehet kisebb, a 12.-ből pedig, hogy egy szög lehet nagyobb a derékszögnél. Ekkor hegyes szögnek illetve tompaszögnek kell nevezni ezeket a szögeket! Ennél több közvetlen információt nem kapunk a szögekről. A szögek jelzett összehasonlíthatóságáról, a kisebb-nagyobb viszony meghatározásáról, a mérés pontos lebonyolításának mikéntjéről nem esik szó. A későbbiekben kapunk még négy, a szögekre is vonatkoztatható „szűkmarkú utalást", így a továbbiakban erre kell hagyatkoznunk. A 13. definíció például közli: *Határ az, ami vége valaminek*. Ezt az általános meghatározásnak szánt kijelentést, a szög objektum vonatkozásában, kissé precízebben a következőképpen fogalmazhatjuk meg: a szöget [mint összefüggő síktartományt,] saját szögszárai határolják. A 4. posztulátumban: *Követeltessék meg, hogy minden derékszög egymással egyenlő legyen,* a 7. axiómában: *Az egymásra illeszkedők egyenlők egymással,* a 8. axiómában: *Az egész nagyobb a résznél* kijelentéseket olvashatjuk még. Ezen utóbbi állítások alapján felsejlenek egy mértékelmélet körvonalai, amelyen belül utalás történik az alakzatok síkon történő mozgatására, majd egymásra illesztésére összehasonlításuk érdekében.

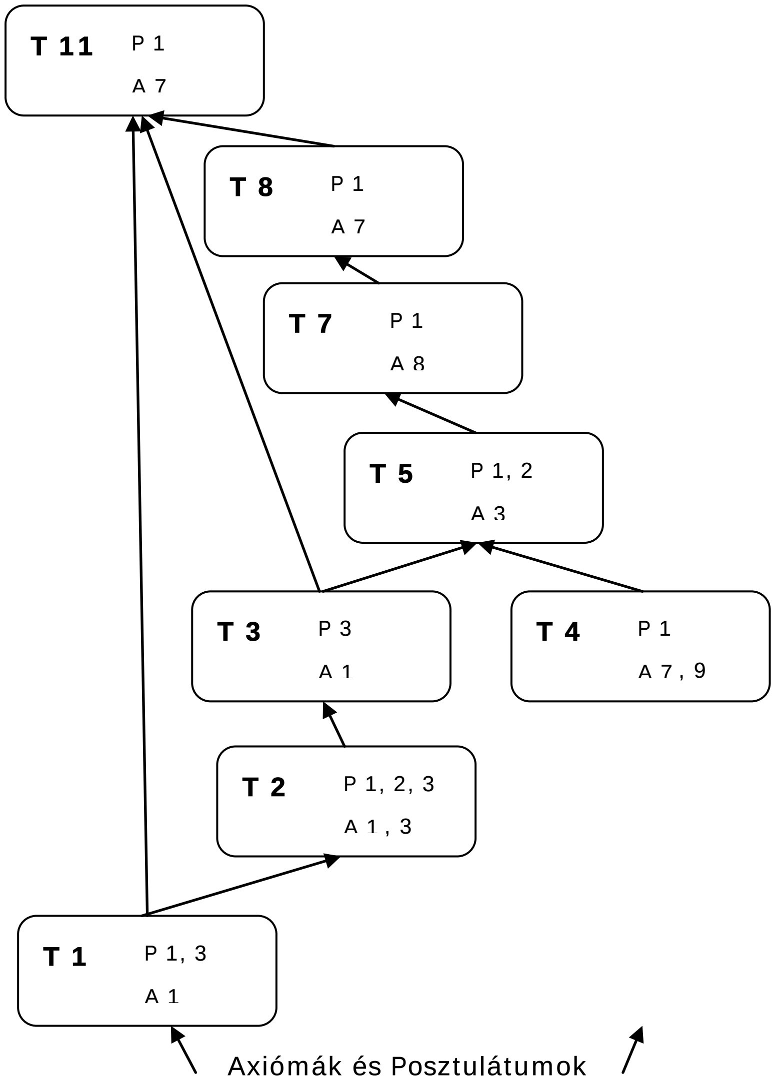
Ahhoz, hogy pontosan értelmezni tudjuk a párhuzamosság fogalmát, először tehát el kell készítenünk egy derékszöget. A rendelkezésünkre álló definíciókat, posztulátumokat és axiómákat úgy kell használnunk, mint egy receptkönyvet. Úgy, ahogyan egy sohasem főzött egzotikus ételt készítünk szakácskönyv segítségével, hiszen nem tudjuk milyen ízű és milyen állagú lesz az étel.

Az első meglepetésünk mindjárt az, hogy az említett tízedik definíció magától értetődőnek tekinti: bármely egyenesre, annak bármely pontjában mindig lehet úgy egyenest állítani, hogy egyenlő mellékszögek keletkezzenek. Nos, ez egyáltalán nem magától értetődő! Persze, köszönjük szépen az olyan világot, amelyben valaminek nincs fele! Mindenesetre érezzük, teljesen ingoványos talajon állunk. Vajon melyek azok az alap princípiumok, amelyekből le tudnánk vezetni, hogy mindennek van fele, tehát egy egyenesszögnek is? Egy új világot szeretnénk alkotni, de semmi fogódzónk! Viszont amit manuálisan meg lehet szerkeszteni a valós fizikai térben, papíron vagy a homokban, arról azt gondoljuk működőképes. Euklidész is ezt az utat járja be.

Az I könyv 11. tételében megadja annak a szerkesztésnek a leírását, amely garantálja, egy egyenes bármely pontjában merőlegest lehet állítani az egyenesre, és ez a megszerkesztett egyenes éppen két derékszöget fog alkotni az eredeti egyenessel. Euklidész a magyar „merőleges" szó helyett, ami a gravitációs térben a kútból megfelelő módon felhúzott vödör helyzetére utal (merőleg), a καθετος (kathetosz – lebocsájt) kifejezést használja: ... *egy egyenes bármely pontjába lebocsájtható egy másik* ... . Euklidész tehát ahelyett, hogy türelmetlenül kimondaná egy direkt egzisztencia axiómával: *létezik derékszög*, türelmesen levezeti a derékszög létezését gondosan válogatott posztulátumaiból és axiómáiból.

Fizikai tér és Párhuzamosság

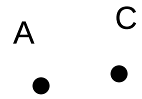
Megmutatjuk az I.11 tételre vonatkozó úgynevezett „levezetési fa” szerkezetét. A levezetési fában szereplő tételek az *Elemek* eredeti számozását követik. A tételek fogalmi körülírásához a megadott definíciókat használjuk, a posztulátumokat (P) és axiómákat (A) - ezek lesznek a fa „gyökerei” - pedig többször is felhasználjuk egy-egy tétel (T) bizonyításához. A fa ágain úgy helyezkednek el a tételek, mint a levelek. Ha egy tétel bizonyításához fel kell használnunk egy korábban még nem bizonyított állítást, azt előbb bizonyítanunk kell. A bizonyított állítás tétellé válik. Ha egy állítás bizonyításában felbukkanna egy újabb nem bizonyított állítás, azzal ugyanezt kell tenni. Ezt a regresszust mindaddig ismételni kell, amíg el nem jutunk a nem bizonyítható, megegyezéssel elfogadott állításokig, a fa gyökereiig. Az ily módon létrejött levezetési fa tételeinek igazsága az alsóbb szintek állításainak igazságán alapszik. Ahelyett, hogy felsorolnánk az első könyv 5 posztulátumát és 9 axiómáját a gyökérzet szintjén, az egyes leveleknél jelezzük, mely gyökerek „táplálják” őket, illetve mely korábbi tételekből következnek.



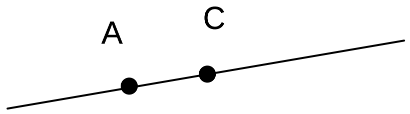
A derékszög létezését garantáló I.11 tétel kifogástalan bizonyításához végig kell járnunk a levezetési fa minden egyes részletét a gyökérzettől felfelé haladva. Ez mindenképpen izgalmas kaland, bepillantást nyerünk Euklidész gondolataiba. Ami talán még ennél is érdekesebb, a levezetési fa ágain oda-vissza lépdelve kiszűrhetjük, mely sarkalatos részleteken múlik végeredményben, egy-egy tétel igazsága.

Az I.11 tétel vázlatos bizonyítása:

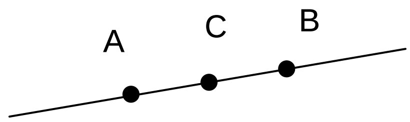
Legyen adott két pont, A és C.



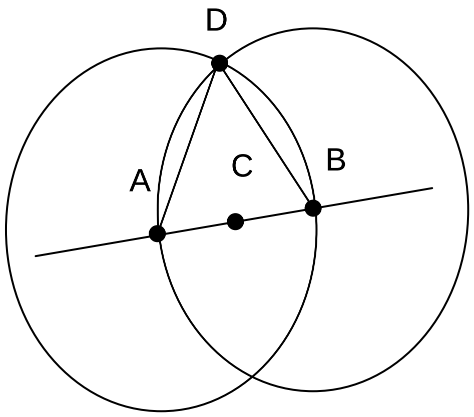
P1 szerint létezik az A-ból C-be húzott AC egyenes, *P2* szerint AC egyenes C-n túl egyenesben folytatólag meghosszabbítható. Ha a meghosszabbítás nem lenne elég, újra alkalmazzuk *P2*-t a hosszabbítás meghosszabbítására. Ezt a lépést ismételjük a szükséges alkalommal. [Első izgalmas kérdés: mi van akkor, ha bármeddig is hosszabbítjuk C-n túl AC egyenest, annak meghosszabbítása összességében is kisebb az AC szakasz hosszánál - erre ui. támaszkodnunk kell a későbbiekben -, azaz nincs elég „tágassága” a síknak ebben az irányban?]

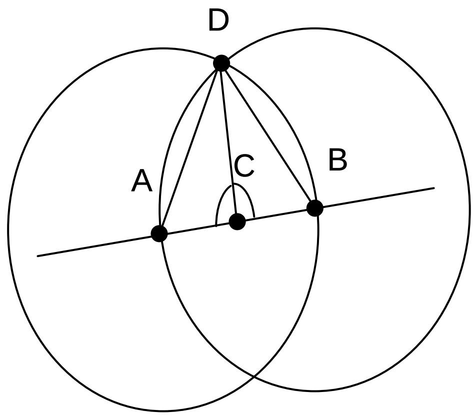


P3 miatt lehet C középponttal és AC távolsággal kört rajzolni, amely kimetszi AC egyenesen azt a B pontot, melyre AC=CB. (*D15* szerint egy kör bármely sugara azonos hosszúságú szakasz) [Itt belefutunk a második érdekes kérdésbe: a definiált – azonosnak gondolt – hossz minden esetben azonos-e az adott helyen ténylegesen mérhető hosszal?]



T1 szerint egyenlő oldalú háromszöget állíthatunk AB szakaszra, A illetve B középpontú, AB sugarú köröket használva, melyek egy D pontban fogják metszeni egymást. [Harmadik kérdés, amit már az előző pontban is feltehettünk volna: mi garantálja, hogy a két alakzat feltétlenül metszi egymást?]





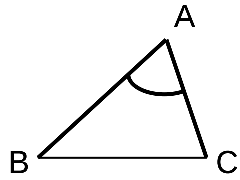
Összekötve D és C pontokat, keletkezik két háromszög: ACD és BCD. A háromszögekben DC oldal közös. A keletkezett két háromszög oldalai tehát páronként azonos hosszúságúak, ezért *T8* szerint megfelelő szögeik is egyenlők. Mivel ACD szög egyenlő BCD szöggel és mellékszögek, így derékszögnek nevezhetjük őket.

Fizikai tér és Párhuzamosság

Fontosságuk miatt kiemeljük a levezetési fa **T 4** (negyedik) és **T 2** (második) tételét. A negyedik tétel a következőket mondja ki:

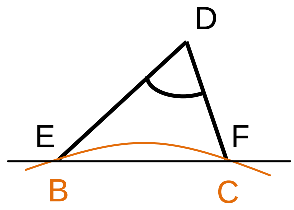
T 4

Ha két háromszögben két-két oldal páronként egyenlő, továbbá az egyenlő oldalak által közrefogott szögek is egyenlőek a háromszögekben, akkor a további egy-egy oldal és két-két szög is egyenlő a két háromszögben. Azaz, ha ABC és DEF háromszögekben AB=DE, AC=DF és BAC=EDF, akkor BC=EF és ABC=DEF és ACB=DFE.



Euklidész bizonyítása:

Illesszük az ABC háromszöget a DEF háromszögre. A megfelelő szakaszok és szögek egyenlősége miatt AB illeszkedni fog DE-re, AC pedig DF-re. Ha BC szakasz, eltekintve a végpontjaitól, nem illeszkedne EF szakaszra, akkor ellentmondásba kerülnénk a 9. axiómával!



Megjegyzések:

Ennek a tételnek a bizonyításánál használja fel először Euklidész a 9. axiómát. Itt válik világossá, hogyan kell érteni a - *Két egyenes vonal nem fog közre területet* - kijelentést: két pontot ugyanis egy, és csak egy egyenes köthet össze. *P1* és *A9* tehát szorosan összetartoznak.

Az illesztés szó használata azt sugallja, van mozgás a síkon. *Egy objektum elhagyhatja eredeti helyzetét úgy, hogy közben megőrzi integritását, elmozdulva is ugyanő marad.* Van alanyiság.

A tétel kezdeti feltételében említett szakasz-egyenlőségek kimondása ellentmondást hordoz. A 7. axióma az egyenlőség megállapítását illesztéssel rendeli ellenőrizhetni. Eszerint nem deklarálhatjuk szakaszok egyenlőségét illesztésüktől függetlenül. Ha viszont már összeillesztettük őket előzőleg, nincs mit bizonyítani, eltekintve a bizonyítás befejező szakaszától! (Euklidész bizonyításában ennek ellenére a befejező szakasz terjedelme mindössze kb. egy hatoda a teljes bizonyításnak, eltekintve a tételek Euklidészre jellemző ismételt kimondásától a bizonyítások végén). Ha mégis kimondjuk az említett szakaszok egyenlőségét, bizonyítanunk kell, léteznek-e egyenlő szakaszok egyáltalán. Továbbá azt is, a szakaszok mozgásuk közben nem változtatják azt a tulajdonságukat, ami alapján egyenlőknek tekintjük őket. Továbbá eljárást is kellene adnunk, amely az említett garanciák mellett ténylegesen illesztési pozíciót garantál.

Euklidész rejtett feltételezéssel él: a valóságos sík saját belső mértékét képesek vagyunk külső eszközökkel a síkra „erőltetni”! Van egy merev körző, ami a térben mozog a sík felett, ez szolgáltatja a külső mértéket. A háromszögek elképzelt szerkesztésekor az alkotó szakaszok felveszik ezt a rájuk kényszerített külső mértéket a sík bármely adott helyén. Ez elég alapot nyújt arra – gondolja -, hogy kimondjuk, a megfelelő szakaszok egyenlőek. Ha van egyáltalán síkba ágyazott belső mérték, elvárásunk, meggyőződésünk, hitünk szerint annak automatikusan engedelmeskednie kell a mi külső mértékünknek. Elvárjuk, hogy a „körzőről levált” szakasz, amikor „belecsobban” a síkba és tovasodródik, megőrizze az általunk külsőleg „rákényszerített” mértéket. Fel sem merül bennünk, hogy két különböző helyen, azonos módon készített szakasz egymásra sodródva ne lenne egyenlő.

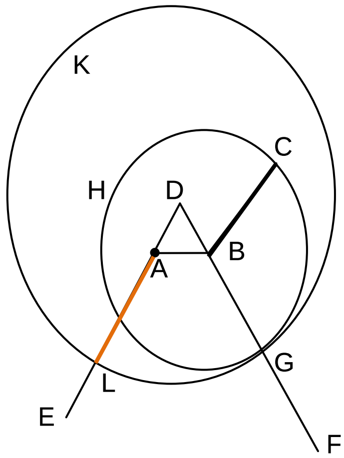
A második tétel nemcsak azért érdekes, mert belepillanthatunk egy új „színdarab” rendezőjének első próbájába.

T 2

Helyezzünk adott ponthoz adott szakasszal egyenlő szakaszt!

Euklidész bizonyítása (a megszerkeszthetőségről):

Az A ponthoz helyezünk a BC szakasszal egyenlő szakaszt. Az AB szakasz fölé *T1* alapján egyenlő oldalú háromszöget szerkesztünk, harmadik csúcsa D. Majd B középponttal és BC sugárral, ezután D középponttal és DG sugárral [$G = DB \cap H$] köröket szerkesztünk. Ekkor DL=DG [a DG sugarú körben], DA=DB, így *A3* miatt DL-DA=DG-DB. Tehát AL=BG, de BG=BC is igaz, így *A1* miatt AL=BC.



Megjegyzések:

Ennél a szép és elegáns szerkesztésnél Euklidész észrevehetően tartózkodik egy kézenfekvőnek tűnő megoldástól: toljuk egyszerűen a BC szakaszt a rögzített A ponthoz. Az „eltolás” – gondolhatjuk –, megengedett, amint azt **T 4** –ben láttuk. De hogyan is kellene megvalósítani ezt az „egyszerű” >>eltolást<<? Hogyan garantálható, hogy BC szakasz valamely végpontja éppen A pontba kerüljön. Nem szabad elfelejtenünk, a geometriai tér absztrakt, nincs benne fény, hogy látvány alapján ellenőrizzük, a B vagy C szakasz-végpont éppen A pontba került-e. Sőt, a tér absztraktságából valójában az is következik, mégha lenne is fény ebben a térben, akkor sem láthatnánk semmit, mert maguk az objektumok is absztraktak. Senki emberfia nem látott még soha pontot vagy szakaszt és nem is fog! Ábránk egy modell, nem maga az absztrakt tér. Tovább gondolva az „eltolás”-illesztés problematikáját, a négyes tétel bizonyításában nem fogalmaztunk meg semmiféle kételyt az illesztés *pontosság*ával szemben. Nem vetettük fel, milyen eljárás segítségével is tudnánk a háromszög megfelelő pontjait egzaktul egymásra helyezni. A négyes tételben azonban nemcsak a kiinduló szakasz volt adott, hanem adott volt az „érkeztető” szakasz is, ahová illesztéssel meg kellett érkezni. A második tételben új helyzetet teremt, hogy nincs „érkeztető” szakasz! És végül ne felejtsük, a második tétel a negyedik tétel „alatt” van a levezetési fában. Euklidész tehát okkal választotta az általa bemutatott szerkesztési eljárást!

Ha a BC távolságot körzőnyílásba vennénk, majd ezzel *A* középpontú kört rajzolnánk, ez az említett „eltolással” lenne analóg. A körző nevű objektum ugyanis nem definiált, és semmiképpen sem része a síknak.

A bemutatott szerkesztés a >>mozgás<< egzisztencia szerkesztése! Mindössze az első három posztulátum felhasználásával sikerül Euklidésznek egy tetszőleges helyen lévő szakaszt egy másik tetszőleges helyre áthelyezni úgy, hogy a két szakasz biztosan egyenlő maradjon. *A két szakasz egyenlőségét ugyanakkor nyilvánvalóan nem garantálhatja az illesztési axióma.* Az illesztési axiómához ugyanis két független létező szükséges, akik illesztési viszonyba kerülhetnek, és vagy egymásra illeszthetők, vagy nem. A bemutatott szerkesztésben a szerkesztés nyomán „születik" az új szakasz. (És itt visszajutottunk az előző tételnél már említett ellentmondáshoz.) Mi garantálja tehát a mozgás által létrehozott „kópia" egyenlőségét az eredetivel? A 15. definíció a következőt mondja: *A kör síkbeli alakzat, amelyet egy vonal vesz körül, úgy, hogy az e vonal és egy az alakzat belsejében fekvő pont közé eső szakaszok egyenlők egymással.* A pontot középpontnak a szakaszokat sugárnak nevezve tehát *per definitionem* a kör minden sugara egyenlő, ezért BC=AL. Nincs kimondva, hogy a körnek úgy kell kinéznie, mint azt az ábrán látjuk, és az sincs kimondva, hogy kört körzővel kell tudni rajzolni! Ha a kör ovális és AL „szemmel láthatóan nagyobb" lenne BC-nél, akkor is AL=BC. Ha a síkban érvényes belső mérték nem forgás invariáns, és a mérték különböző irányokban „pulzál", akkor körünk ugyan egy küllő nélküli nyolcas alakú abroncsra, vagy rongyos szalmakalapszélre fog hasonlítani, de továbbra is *per definitionem* az ezt a kört megvalósító eljárás egyenlő sugarakat egyenlőkbe visz.

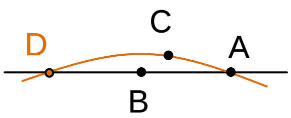
A 15. definícióban a kör fogalmi meghatározásán túl Euklidész kijelentést fogalmaz meg a kör sugaraira, ami valójában egy átmenet a posztulátum és az axióma között, azonban semmiképpen nem definíciós mozzanat! Ez az egyetlen olyan mozgásra vonatkozó posztuláció, amely kimondja, *a kör sugarai a szerkesztés erejénél fogva egyenlőek*! A 22. tételben a 3. tétel szerkesztésének újabb variánsát felhasználva lényegében kimondja: a sík egy tetszőleges helyén „megjelenő" háromszög a sík egy tetszőleges másik helyén „megjeleníthető". Ez a szerkesztés a 8. tétel alapján a szög másolhatóságát is lehetővé teszi (23. tétel). *Az egymásra illesztett szakaszok egyenlőségét kimondó 7. axióma kizárólag a 15. definíció rejtett posztulációján keresztül értelmezhető!*

Univerzumunk magja egy pont, és egy hatóerő, a körző (és a merev, beosztás nélküli „egyenes" vonalzó), ami fizikai viselkedésével kikényszeríti a sík struktúráját. Ez a körző homogénné és izotróppá teszi a síkot, a mértéket lineárissá és additívvá. A síkot tehát kétségtelenül mi teremtjük meg olyanná, amilyenné! A kérdés az, a valódi sík „belesimul-e" „teremtésünkbe", vagy megfordítva, belesimul-e teremtésünk a valóságba?

Alanyiságunk fizikai beágyazása következtében van egy olyan régiója teremtett síkunknak, amit nem uralunk: a *végtelen távoli régió*! Márpedig a *párhuzamosok* éppen ebben a régióban „akarják nem metszeni" egymást!

Az aktuális végtelen megjelenése a párhuzamosság fogalmában

Euklidész nem használ mindenre kiterjedően explicit egzisztencia axiómákat. Számára természetes, hogy amiről beszél, az létezik. Ebből az is következik, nem vizsgálja, hogy az implicit egzisztenciák milyen objektumok létét garantálják. Szerkesztései azonban „ráutaló” magatartást tükröznek: amit megszerkeszthetünk, az van is! Van tehát három különböző, nem egy egyenesen fekvő pont a síkban: *A, B, C*. A második posztulátum szerint léteznek az *AB* és *AC* egyenesek, ahol az egyenesek *A* pontja közös. Mivel az I.15 tételben utalás történik arra, ha két egyenesnek van közös pontja, akkor egymást metszőknek nevezzük őket, ezért tehát az *AB* és *AC* egyenesek metszik egymást az *a* pontban. A két egyenesnek a 9. axióma miatt nem lehet több metszéspontja, azaz további *D* közös pont nem létezhet!



Az első posztulátum és a 9. axióma együtt azt is biztosítja, ha két egyenesnek mégis lenne két különböző közös pontja, akkor az egyeneseknek egymásra kellene illeszkedniök, de ez ellentmondana a kezdeti feltételnek. Látjuk tehát, két különböző egyenes megteheti, hogy pontosan egy pontban metszi egymást. Ezek után fel kell tennünk egy, az eddigiekből logikusan következő kérdést: Előfordulhat-e, hogy két különböző egyenes nem metszi egymást. Kezdjük el ugyanis mozgatni a két egyenes közös pontját az egyik egyenes mentén, egyre távolabbra, és amikor már senki sem látja a metszéspontot, kérdezzünk meg ravasz módon valakit: metszik-e egymást az egyenesek? Mi persze tudjuk, hogy igen. (Jó móka!) De mi a helyzet a fordított esettel, ha másvalaki teszi velünk ugyanezt? (Kevésbé jó móka!) Lehetséges, hogy minden egyenesnek metszenie kell egymást?

Euklidész definícióit általában automatikusan *teremtő*nek tekinti, érzékelve azonban a már említett 23. definíció fontosságát - *Párhuzamosak azok az egyenesek, amelyek ugyanabban a síkban vannak és mindkét oldalt végtelenül meghosszabbítva egyiken sem találkoznak* - úgy érzi, igazolnia kell ennek az egyenesek közötti speciális új viszonynak a létezését. Ezt az első könyv 28. tételében teszi meg.

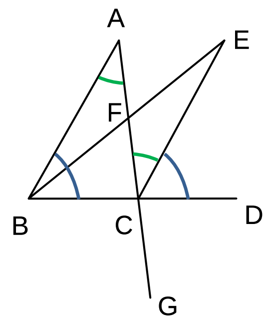
A részletes levezetési fa felrajzolásától most eltekintünk, csak utalunk a tételek logikai láncolatára: I.28 ← I.27 ← I.16 ← I.15 (és I.4, I.3) ← I.13 ← I.11. A kiindulási alap a korábbiakban említett I.11 tétel, a regresszusban tehát visszaérkeztünk a derékszög (R) létét bizonyító tételhez, illetve ezen keresztül újra visszajutunk a levezetési fa gyökereihez, az axiómákhoz és posztulátumokhoz.

Fontossága miatt az I.28 tétel előtt az I.16 tétellel foglakozunk.

Fizikai tér és Párhuzamosság

T 16

Minden háromszögben az egyik oldal [BC] *meghosszabbításakor keletkező külső szög* [ACD] *nagyobb mind a két szemközti belső szögnél* [BAC, CBA]*.*



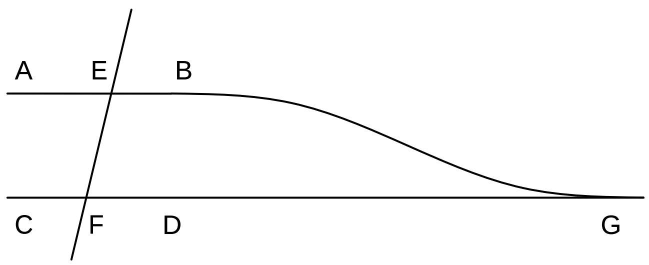
Euklidész bizonyítása

Az ABC háromszög AC oldalának felezés pontja legyen F, továbbá BF F-en túli meghosszabbításán legyen E, melyre FB=FE. Az F-nél keletkező csúcsszögek I.15 szerint egyenlők, így I.4 szerint ABF háromszög illeszkedik CEF háromszögre. Ezért BAC és ACE szögek egyenlők. Az ACD külső szög *A8* szerint viszont nagyobb ACE szögnél. Amennyiben BC oldalon is felveszünk egy felezéspontot, hasonlóan megmutathatjuk: ACD külső szög nagyobb ECD=ABC szögnél is.

T 28

Ha két egyenest egy egyenes úgy metsz, hogy ugyanazon az oldalon két derékszöggel egyenlő belső szögek keletkeznek, akkor a két egyenes párhuzamos.

Euklidész indirekt bizonyítása

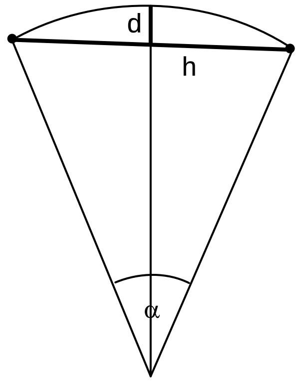


A feltétel szerint BEF és EFD szögek együtt két derékszöget alkotnak. BEF és AEF szögek együtt I.13 szerit szintén két derékszöget alkotnak. *A3* szerint tehát AEF=EFD. Legyen G a CD egyenes egy végtelen távoli pontja! Ekkor nyilván EFD=EFG. Tegyük fel ezután, hogy AB és CD mégis metszik egymást ebben a végtelen távoli G pontban. Ekkor az EFG háromszögre AEF külső szög egyenlő az EFG nem mellette fekvő belső szöggel. Ez viszont ellentmond I.16-nak, amely szerint AEF nagyobb EFG! Feltevésünk tehát hamis volt, AB és CD a megadott feltételek mellett nem metszhetik egymást.

Megjegyzések:

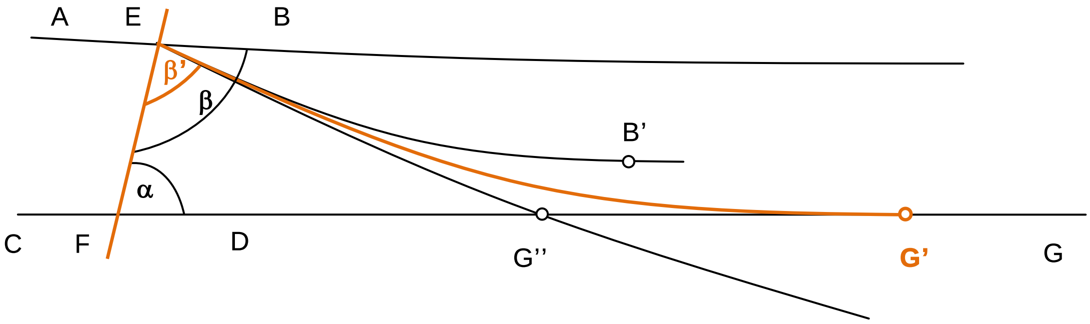
A két egyenes metszéspont nélküliségének ellenőrzése érdekében Euklidésznek el kellene sétálnia a végtelen távoli G ponthoz. Ekkor „szemrevételezhetné” a helyzetet. Ez azonban nyilván lehetetlen, tehát *most először a természetes módon véges szemlélettől függetlenül kell bizonyítania a párhuzamosságot*, a nem-metszés egzisztenciáját. Az eddigi bizonyításokhoz képest ez drámai újdonság. Egy végtelen alakzatra tett kijelentés bizonyítását végesben kell megtennie. Figyelemre méltó, hogy az EF egyenesre, mint bizonyító erejű „mérő” egyenesre mindenképpen szükség van. És EF a végesben van (!). És egyáltalán, eddig minden bizonyítás a „megfigyelőhöz” képest a végesben, itt és most zajlott, lokálisan. Ez talán ekkor tudatosodik először Euklidészben. A mindig szemrevételezhető, lokálisan teremtő körző és véges hosszú vonalzó most először nem adhat útbaigazítást!

A végtelen távoli egyébként is óvatosságra int. Példaként egy igen nagy sugarú kört vizsgálunk, ugyanis a harmadik posztulátum lehetővé teszi akármekkora sugarú kör használatát: *Követeltessék meg, hogy minden középponttal és minden távolsággal legyen kör rajzolható!* A következő kérdést tesszük fel: Adott sugarú körben hogyan változik egy húrnak a húrhoz tartozó kisebbik körívtől mérhető legnagyobb távolsága (d) illetve a húr hosszának (h) aránya, amennyiben egyre csökkentjük a húr hosszát? A kérdésre szögfüggvények alkalmazása nélkül is tudunk válaszolni. Hasonlósági megfontolásokat, a számításokhoz arányokat használva maga Euklidész is elvégezhette a kérdés megválaszolásához szükséges szerkesztéseket. Hogy elkerüljük az egyre csökkenő húrhosszak miatti mérési nehézséget a következőt tesszük. Két egymást követő lépésben lépésenként tízszeresére növeljük a kiindulásul választott kör sugarát és egyidejűleg tizedére csökkentjük a húrhoz tartozó középponti szöget. Ennek hatására a húrhoz tartozó ív hossza állandó marad. Az első kör 1 méter sugarú és 60°–os középponti szöggel készítjük a húrt. A nagyított körök 10 illetve 100 méter sugarúak és 6°–os illetve 0,6°–os középponti szögekkel készítjük a húrt. A keletkező ívek hossza állandó lesz, 104,7 centiméter. Az arányok pedig d:h= 0,1339745, 0,0130929, 0,00130899. Jól látható, a körök sugarának növelése nyomán egyre csökkenő hosszúságú *d* húrtávolság elenyészően kicsi lesz a húrhosszhoz képest, a húr kezd „egybeolvadni" a hozzá tartozó körívvel. A történelmi időben eljutva az 1700-as évekig, a kor matematikai eszközeit felhasználva, már egzaktul is bizonyítani tudjuk az Euklidész korában szerkesztések alapján megsejtett tényt: az α középponti szög egy nagyságrenddel történő csökkentése esetén, mivel $\alpha \to 0 \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha/\alpha \to 1$, a keresett arány is egy nagyságrenddel csökken. A görög városállamok távolságával összemérhető 100 kilométer nagyságú kör esetén e kör 10 méter hosszúságú íve húrjától legfeljebb mindössze 0,125 milliméter távolságban fut. Ha tehát kifeszítünk egy 10 méter hosszú acélhuzalt, melynek átmérője 0,126 milliméter, akkor az említett kör íve nem lép ki az egyenes (!) huzalból. Így, ha egy Euklidész korabeli hangya végig gyalogolt volna ezen a huzalon, Euklidész a rendelkezésére álló mérési pontosságot figyelembe véve nem tudta volna eldönteni, hogy a hangya egy egyenesen, vagy egy elég nagy sugárral rendelkező kör ívén gyalogolt végig! És ez a kör még nem végtelenül nagy sugarú, sugara csak 100 km.



Euklidészben felmerült tehát a gyanú: Mi van akkor, ha a végesben megfogalmazott bizonyítások nem állnak meg végtelen kiterjedésű síkidomok esetén?! Ha I.28 bizonyítása mégsem áll, bármely két egyenesnek metszenie kell egymást! Nincsenek az említett értelemben párhuzamosok! (XIX. század: elliptikus geometria) De az is előfordulhat, vannak olyan párhuzamosok, melyeknél a „mérő egyenesnél" jelentkező kritikus „mérő összeg" kisebb, mint 2R! (XIX. század: hiperbolikus geometria). Utóbbi esetben felmerül egy új és még súlyosabb kérdés: A bizonyos véges hol „csap át" bizonytalan végtelenbe?

Az I.28 tétel feltétele szerint EFD=α és BEF=β szögek együtt két derékszöget alkotnak. Ha a CD egyenesen G’ az a pont, ahol megtörténik az „elpattanás”, megtörténik a „fázisugrás” a végesből a végtelenbe, akkor EB’ minden olyan EF-hez történő hajlására, melyre $\alpha+\beta' <$ EFD + B’EF $< \alpha+\beta \leq 2R$, szintén nem metsző egyenesek keletkeznek! A véges geometria tehát csak olyan egy egyenesre hajló egyenes párokra állhat, melyekre a hajlások együtt az EFD és G’EF hajlások együttesénél kisebbek vagy egyenlőek!! Figyelembe véve az EFD hajlási szög lehetséges változatos értékeit egy bizonytalan sokszerűséghez jutunk!



És ekkor jön a több, mint két évezredig nem értett nevezetes párhuzamossági posztulátum: *Követeltessék meg, hogy ha két egyenest egy harmadik úgy metsz, hogy az egyik oldalon keletkező belső szögek együtt két derékszögnél kisebbek, akkor a két egyenes a megfelelő oldalon végtelenül meghosszabbítva találkozzék!* Euklidész ezzel jelzi, nem bizonyos a végesben történt bizonyításának végtelenbeli érvényessége tekintetében. A bizonyítás helyességét végül hallgatólagosan elfogadva, a további „kellemetlenségek” elkerülése érdekében, ha a bizonyítás mégsem állna, *imperatív* módon kizárja a megsejtett bizonytalanságot. A végest tehát a lehető legmesszebb kiterjeszti a CD egyenesen, a végtelennek mindössze „null dimenziót” engedélyezve.

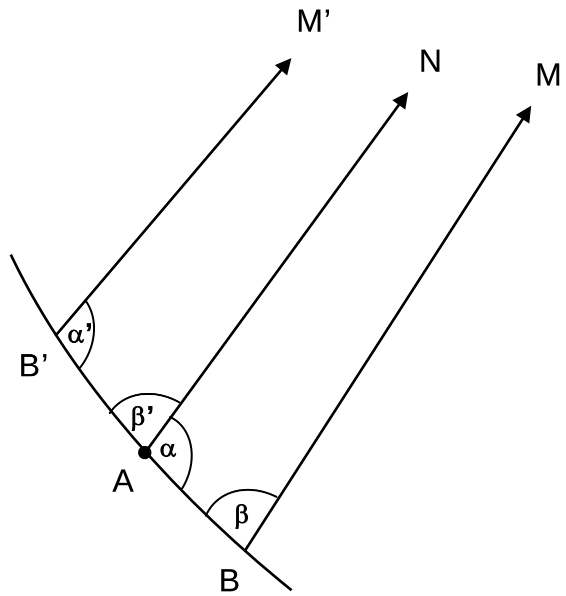
„Integratív” párhuzamosság Bolyai hiperbolikus terében

Bolyai új nem-metszés fogalmat vezet be: *Ha vannak olyan α és β szögek, amelyekkel egy harmadik egyenes hajlik ugyanazon oldalán két különböző egysíkbeli egyenesre úgy, hogy ekkor a két különböző egyenesnek végtelenül meghosszabbítva sincs közös pontja,* ***továbbá*** *minden α' és β' hajlásokra, melyekre $\alpha' + \beta' < \alpha + \beta$ az egyenesek metszik egymást, az egyeneseket párhuzamosoknak (nem metszőknek) nevezzük.*

Bolyai tehát nem tolja ki imperatív módon a G’ pontot a végtelen távoli G pontba, elutasítva mindenfajta extremitást. Ellenkezőleg, azt az első AB egyenest keresi, ha van ilyen, ami már párhuzamos tud lenni CD egyenessel, függetlenül a kritikus 2R szögösszegtől. Megengedi tehát az extremitást és arra kíváncsi mi fog történni!

Izgalmas kérdés, vajon milyen szabályoknak engedelmeskednek azok az AB egyenesek, amelyek CD egyenest a véges G' és végtelen távoli G között metszenék végesben mért hajlásszögeik alapján, de mégis párhuzamosak CD-vel! Bolyai 1823-ban ezt az egyenes sereget kézzelfogható tapasztalatok híján nem vizsgálja. Csak jóval később, több mint száz év múlva, például Szász Pál munkáiban jelennek meg először ezek a „misztikus” egyenesek.

Euklidész nem generálja direkt módon a síkot. A síkot a definíciók biztosította létezők népesítik be, a posztulátumokból eredő kölcsönös viszonyaik közvetve mutatják meg a sík tulajdonságait, viselkedését. Bolyai viszont direkt módon definiál egy olyan felületet, a *paraszférát*, melynek semelyik három pontja sincs egy euklidészi egyenesen (pl. A, B, B′), mégis működik rajta az Euklidészi geometria.



AN egy tetszőleges *A* kezdőpontú félegyenes a térben, *N* a félegyenes végtelen távoli pontja. A paraszférát *A* és azok a *B*, *B'*, … pontok alkotják, melyekre Bolyai párhuzamosság definíciója értelmében *AN* || *BM*, *AN* || *B'M'*, …, és $\alpha=\beta$, $\alpha'=\beta'$, … . [Bolyai előbbiek teljesülését AN≏BM jellel jelölte, ahol az *AN* és *BM* párhuzamos egyenesek azonos szögben, *izogonálisan* hajolnak a mérő egyeneshez. Az $\alpha=\beta$ lehetőséget egy korábbi tételben bizonyítja.] Az *AN* félegyenest tartalmazó síkok a paraszférát egy-egy vonalban metszik. Az ábra *ABB'* ívét az [ANB] sík metszi ki. Az *ABB'* ív neve *paraciklus*. Ha $\alpha+\beta=2R$, a paraszféra azonos az Euklidészi geometria síkjával, a paraciklus pedig egyenesével, *AN* egy a síkra merőleges egyenes.

Ha az *AN* tengely körül megforgatjuk a paraszférát, minden felületi pont felületi pontba megy át. Ha a paraciklust egyik pontjánál megfogva, a pontot az ív mentén egy másik paraciklus pontig mozgatjuk, a mozgatott paraciklus minden pontja a helyben maradó eredeti paraciklus egy pontja lesz, a görbe önmagában eltolható (akár egy euklideszi egyenes).

Ha a paraszféra tengelye *AN*, bizonyítható, hogy fenti feltételek mellett tetszőleges *B* paraciklus pontra *BM* is tengelye. (Appendix, 12. §) Ha a paraszféra *A* pontján átmenő előbbiek szerinti másik síkmetszetet választunk, a keletkező új paracikluson keresztül a paraszféra bármely pontját elérhetjük, megadva a paraszféra ezen tetszőleges pontbeli tengelyét. Ily módon a paraszféra bármely két pontján átmenő Bólyai-féle egyenes (paraciklus) megszerkeszthető a két adott pont tengelyét tartalmazó sík és a paraszféra metszeteként.

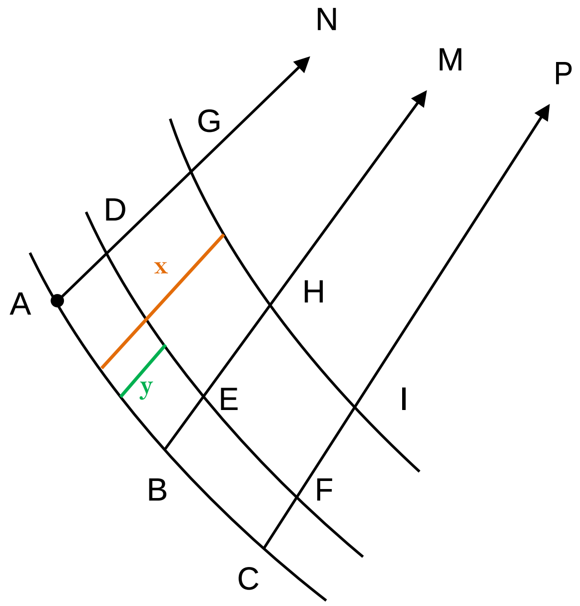
A paraszférán elhelyezkedő paraciklusokra igaz Euklidész első könyvének fentebb tárgyalt 28. tétele (T 28.), azaz ha két paraciklusra egy harmadik úgy hajlik, hogy a hajlások összege kisebb 2R, a paraciklusok metszik egymást! (Appendix, 21. §) Euklidész nevezetes párhuzamossági posztulátuma tehát kiküszöbölhető a „sík” megfelelő „meggörbítésével”! *Ekkor a tér belső mértéke uralkodik, ezért a „valódi” háromszögek belső szögösszegének megmérése nem nyújthat támpontot a tér görbületéről!*

Az Euklidész korát közvetlenül megelőző nemzedék talán legismertebb gondolkodója, Arisztotelész, ezzel kapcsolatban *De Anima* című művében a következőket írja: „ ... *mindenek előtt tudnunk kell, mi az egyenes és mi a görbe, ahhoz, hogy megtudjuk, hány derékszöggel egyenlő a háromszög szögeinek összege.*”

Bolyai-féle mérték

Vegyük fel az *AN* félegyenesen az *A*-tól különböző *D illetve G* pontokat, és cseréljük egymás után az eredeti *AN* félegyenes kezdőpontját ezekre a kezdőpontokra. Képezzük a *DN* illetve *GN* félegyenesek által, az említettek szerint meghatározott paraszférákat! Legyenek továbbá *BM* és *CP* az *AN* tengely által meghatározott *ABC* paraciklus tengelyei.

Bizonyíthatóak a következő állítások:



DEF és GHI paraciklusoknak, melyeket DN illetve GN generált egyben EM és FP illetve HM és IP is tengelyei. Továbbá:

AB : DE = BC : EF = Y

AB : GH = BC : HI = X

$\mathbf{Y = X}^{y/x}$ (Appendix, 24. §)

A paraszférák görbült felületeit egymásra rétegeztük, akár egy hagyma héjait. Az egymás feletti rétegekben elhelyezkedő paraciklusokból az egymással párhuzamos tengelyek által kimetszett „azonos hosszúságú” szakaszok hosszainak aránya nem 1! A felületeknek saját belső mértéke van! Az arány független az egymásnak megfelelő szakaszok hosszaitól (2. és 3. állítás), kizárólag a paraszférák konstans x illetve y távolságától függ. Ha ismerjük a mértéket egyetlen paraszférán, akkor ismerjük az összesen. (4. állítás - Appendix, 24. §)

Az Euklidészi térben a hagymahéjak szendvics szerkezetbe mennek át, X és Y nyilvánvalóan 1.

Hilbert eredeti axiómái másképp

Hilbert 1899-ben megjelent művében 22 axiómára alapozva építette fel a klasszikus geometriai teret. Tíz illeszkedési, négy rendezési, öt egybevágósági, egy párhuzamossági, és két folytonossági axiómát fogalmazott meg.

Az axióma rendszerében rögzített kulcsfogalmakat lecseréljük új fogalmakra! Ezt megtehetjük, hiszen - szándékosan - a kulcsfogalmak egyikét sem definiálta. A *Pont* fogalmának helyébe mindenhol kerüljön ***gyermek***, az *Egyenes* fogalmának helyébe ***felnőtt***, a *Sík* helyébe ***család***! Az *illeszkedik* viszonyt a valaki ***szeret*** valakit viszonyra cseréljük. Az *A szereti B*-t viszony nem szimmetrikus. Abból ugyanis, hogy *A szereti B*-t állítás igaz, nem következik, hogy *B szereti A*-t állítás is igaz!

A szeretet axiómái

sz1. Bármely két gyermekhez tartozik egy felnőtt, aki mindkettőjüket szereti.

sz2. Bármely két gyermekhez legfeljebb egy felnőtt tartozik, aki mindkettőjüket szereti.

Az első két axiómát összevonhatnánk a rövidség kedvéért így: Bármely két gyermekhez *pontosan egy* olyan felnőtt tartozik, aki mindkettőjüket szereti.

sz3. Minden felnőttet legalább két gyermek szeret.

Az eddigi axiómák nem biztosítják, hogy létezzenek gyermekek és felnőttek. Ezért egy egzisztencia axiómában határozottan deklarálnunk kell, hogy alanyaink nem fikció tárgyai: Létezik három gyermek! Egzisztencia axiómánkat kissé még élesítjük is, amennyiben az első három axióma által megengedett viszonyt rovunk ki a létezőkre.

szE1. Létezik három olyan gyermek, akiket nem ugyanaz a felnőtt szeret.

Ezt az egzisztencia axiómát talán két mondatban kellene megfogalmaznunk: Létezik három gyermek. Az említett három létező gyermeket nem ugyanaz a felnőtt szereti. Erre azonban nincs szükség, hiszen amint kimondtuk, hogy van három gyermek, az is nyilvánvaló, hogy van kettő is, azaz *sz1* miatt van legalább egy felnőtt is, aki kettőjüket szereti. A mondat tehát értelmesen folytatható a felnőttnek, mint alanynak a beemelésével, noha külön nem deklaráltuk a felnőtt, vagy felnőttek létezését a mondat megfogalmazása előtt. *E1* axiómánkat azért kellett egy mellékmondattal élesíteni, mert nem élesített változatából nem következne feltétlenül, hogy több felnőtt is van. Ugyanis sem az *sz1* axióma, sem az *sz1 és sz2* axióma együtt nem tiltja, hogy egy felnőtt több gyermeket is szerethessen. Több – legalább kettő – felnőtt létezése a család megjelentetése miatt fontos.

Egzisztencia axiómánkból egyébként következik, hogy legalább három felnőtt is van. Ennek levezetéséhez azonban a logikai térben rejtett feltételezésekkel kellett élnünk: van *három*, van *kettő*; a három *több,* mint a kettő; háromból *háromféle képen* lehet *kiválasztani* kettőt! Kérdés, tekinthetjük-e pusztán metanyelvi leíró eszköznek a felsorolt fogalmakat?

sz4. Ha három gyermek olyan, hogy nem ugyanaz a felnőtt szereti őket, akkor tartozik hozzájuk család, aki mindhármukat szereti.

sz5. Ha három gyermek olyan, hogy nem ugyanaz a felnőtt szereti őket, akkor legfeljebb egy család tartozik hozzájuk, aki mindhármukat szereti.

Az *E1* és *sz4* axiómák együttesen garantálják, hogy létezik család. Univerzumunk most már legalább hét szereplős.

Akár az első kettő szeretet axiómánál, most is összevonhatjuk az utóbbi két axiómát: Ha három gyermek olyan, hogy nem ugyanaz a felnőtt szereti őket, akkor *pontosan egy* család tartozik hozzájuk, aki mindhármukat szereti.

sz6. Minden család legalább egy gyermeket szeret.

sz7. Ha két gyermek mindegyike ugyanazt a felnőttet és ugyanazt a családot szereti, akkor a felnőttet szerető minden gyermek ugyanazt a családot szereti.

sz8. Ha két család ugyanazt a gyermeket szereti, akkor van legalább még egy gyermek, akit mindkét család szeret.

Utolsó szeretet axiómánkat, amely szintén egzisztencia axióma, analógiás módon szeretnénk így megfogalmazni: Létezik négy olyan gyermek, akiket nem csak egyetlen család szeret. Helyesen azonban a következő módon kell megfogalmaznunk:

szE2. Létezik négy olyan gyermek, melyek közül legfeljebb hármat szeret ugyanaz a család.

Ez az újabb axióma azt biztosítja, hogy a legalább egy létező család által szeretett három gyermeken kívül van legalább még egy olyan (negyedik) gyermek, akit az említett család nem szeret. El kell gondolkodnunk azon, vannak-e még más családok is az említett egy családon kívül! Amíg ezt nem látjuk be, az *sz8* axióma fiktív. Sajnos az *szE2* és *sz6* axiómák nem biztosítják, még együtt sem, hogy a „kimaradt" gyermekhez feltétlenül tartozzon szerető család.

A kiemelkedő szeretet axiómái

A következő fogalomcsere előtt a félreértések elkerülése végett közöljük az első két rendezési axióma eredeti megfogalmazását.

r1. Ha egy *B* pont egy *A* és egy *C* pont között van, akkor *A*, *B*, *C* egy egyenesnek három különböző pontja, és akkor a *B* pont a *C* és az *A* pont között is van.

r2. Két ponthoz, *A*-hoz és *C*-hez az *AC* egyenesnek legalább egy olyan *B* pontja illeszkedik, melyre *C* az *A* és *B* pont között van.

Hilbert eredeti axiómái másképp

Az első rendezési axióma bevezeti három pontra a *közötte van* fogalmát. Az eddigi axiómák egyike sem biztosítja, hogy egy egyenesnek biztosan legyen három pontja, de mint láttuk, ez nem igazi probléma, hiszen egy megfelelő egzisztencia axiómával a későbbiekben tartalommal tölthetjük meg az új fogalmakat. Ez meg is történik a második rendezési axiómában. Az axióma tehát rögzíti, hogy van egy új viszony, amelyhez mindenképpen három pont kell, sőt a pontoknak azonos egyenesen kell lennie.

A második axióma megfogalmazása alapján látszik, Hilbert az illeszkedés fogalmát magától értetődő módon szimmetrikus értelemben használja. Az *A* és *C* pontokra illeszkedő *AC* egyenesről, illetve az erre illeszkedő B pontról beszél. Amíg nem mondjuk ki az illeszkedés szimmetria tulajdonságát, nem bizonyítható, hogy *A* és *C* pont illeszkedik az *A* és *C* pontokra illeszkedő egyenesre, vagy ami ezzel egyenértékű, mindhárom pont ugyanazon az egyenesen van! Az is látható, hogy nem két kiindulási pont közé illeszti be a *közötte lévő* tulajdonsággal bíró új pontot, hanem az egyik kiindulási pont (*C*) lesz közötte lévő, miközben létrejön egy új „szélső" pont. Az axióma célja kettős. Legyenek új pontok, és „kifelé" lehessen „terjeszkedni" az egyenesen, meghódítva a végtelen távolit. Ráadásként az új pontok valamiképpen rendezetten jelenjenek meg. A *közötte van* szóhasználat igyekszik megelőlegezni a modellálni kívánt térbeli *helyzet*, *távolság*, *irány* fogalmakat.

Ezek előrebocsájtása után helyezzük a *közötte van* fogalmának helyébe a ***kiemelkedő szeretet*** fogalmát.

ksz1. Ha három gyermek szereti ugyanazt a felnőttet, mondhatjuk, az egyik kiemelkedően szereti a felnőttet.

Ebből az axiómából, de a korábbiakból sem következik, hogy van olyan felnőtt, akit legalább három gyermek szeret. Továbbá az sem következik, hogyha van is olyan felnőtt, akit három gyermek szeret, akkor egyikük biztosan kiemelkedően szereti.

kszE1. Ha két gyermek szeret egy felnőttet, akkor biztosan szereti legalább még egy, és ekkor az eredeti két gyermek egyike biztosan kiemelkedően szereti a felnőttet.

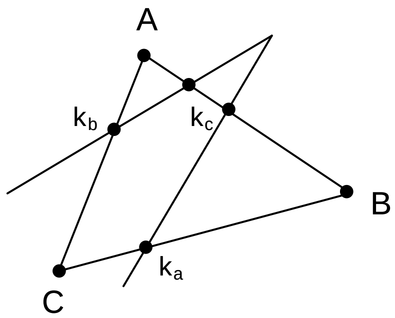
A kszE1 egzisztencia axiómából következik, hogy az sz3 axióma biztosította két szerető gyermekhez egy újabb szerető gyermek csatlakozik, azaz minden felnőttet legalább három gyermek szeret. A ksz1 axióma azt is deklarálja, hogy a kiemelkedő szeretet is szeretet, így a most már három gyermekből két újabb párt képezhetünk, újra alkalmazva a párokra a kszE1 egzisztencia axiómát.

Egyelőre nem világos, hogy a három lehetséges különböző kiválasztásra alkalmazott kszE1 axióma generál–e újabb szerető gyermekeket? Ha nem, akkor három szerető gyermekig juthatunk el felnőttenként.

ksz2. Egy felnőttet szerető bármely három gyermek közül csak az egyikük szeretheti kiemelkedően a felnőttet.

Ennek az axiómának fontos szerepe van. Egyrészt pontosítja a kszE1 egzisztencia axiómát. Az axióma „ekkor az eredeti két gyermek egyike" részében nem kell a *pontosan* kiegészítő szó, azaz felesleges így fogalmazni: „ekkor az eredeti két gyermek *pontosan* egyike". A fogalmazás itt megengedő, azonban ksz2 kizárja, hogy mindkét kiindulásként választott gyermek kiemelkedően szerethesse a felnőttet. Másrészt, ami még fontosabb, kizárja, hogy „befagyjon" a gyermekek generálása. Vastag szedéssel jelölve a kiindulásul választott két gyermeket, az ***AC***-B triász után az A-***CB*** triász nem szükségképpen generál új gyermeket, viszont az ***A***-C-***B*** triászban C-ről már megállapítottuk, hogy közötte lévő. A kszE1 miatt ***A*** vagy ***B*** mindenképpen *közötte* lévő, ebben a kijelölésben, tehát nem lehet C a generált új gyermek hármuk viszonylatában, így C-től mindenképpen különböző gyermekhez kell jutnunk ksz2 miatt. Elindulhat tehát a gyermekek vég nélküli megjelenése, ennek nyomán pedig újabb és újabb szülők jelenhetnek meg és így tovább a végtelenségig.

ksz3. Ha három gyermeket (A, B, C) nem ugyanaz a felnőtt szeret, és egy felnőtt, aki egyik gyermeket sem szereti, de szeret egy olyan gyermeket (k_c) , aki kiemelkedően szereti az eredeti szülők egyikét (<u>AB</u>), az ezt a szülőt szerető két gyermekhez viszonyítva, akkor feltétlenül szeret egy olyan gyermeket is (k_a vagy k_b), aki kiemelkedően szereti a nem említett eredeti szülők egyikét (C), ezen szülőt eredetileg szerető gyermekekhez képest.



Hilbert második rendezési axiómája (r2) a rögzített pontpárok „külső" tartományában keletkeztet pontokat. A ksz3 axióma (mely r4-nek felel meg), azt hivatott biztosítani, hogy a pontpárok „belső" tartományában is „szaporíthassuk" az egyenes pontjait. Nem nyilvánvaló azonban, hogy a pontok akár „kifelé", akár „befelé" történő szaporítása nyomán eléggé sűrűn lefedhető-e az egyenes. Ebben a gondolatban mindazonáltal benne van, hogy *elég sűrűn le kellene tudni fedni az egyenest pontokkal*, mert egy egyenes elég sűrűn le van fedve! Kérdés, következik-e mindez az eddigi axiómáinkból. Amint kioldjuk a fizikai sík nyilvánvaló rendjéből gondolatainkat, ez már nem tűnik annyira bizonyosnak.

Az elkötelezettség axiómái

A szakasz fogalmát, úgy alakítjuk ki, hogy meghatározunk egy pontcsoportot. A pontcsoport két tetszőleges pontból illetve az sz1 alapján ezen pontokhoz rendelt egyenes azon „köztes” pontjaiból áll, melyeket ksz3 generál. A *szakasz* fogalmát az ***elkötelezettség*** fogalmára cseréljük.

Egy felnőtt *elkötelezettségének* a felnőttet szerető olyan gyermekcsoportot nevezünk, amely két olyan gyermekből áll, akik szeretik a felnőttet, továbbá azon gyermekekből, akik kiemelkedően szeretik a felnőttet az előbbi két gyermek vonatkozásában.

e1. Ha egy felnőttnek van egy elkötelezettsége, akkor egy másik felnőttnek van ugyanolyan elkötelezettsége.

Itt nem mondtuk meg, hogyan kell érteni azt, két elkötelezettség „ugyanolyan”. (Az eredeti egybevágósági axiómánál sincs megmondva, hogyan kell érteni azt, két szakasz „egybevágó”. Az axiómákban nincs szó ti. sem a szakaszok „mozgatásáról”, sem „egymást fedéséről”, sem „távolság”-ról, vagy „távolság mérésről”.)

e2. Ha két felnőtt elkötelezettsége külön-külön ugyanolyan, mint egy harmadiké, akkor a két felnőtt elkötelezettsége egymáshoz képest is ugyanolyan.

e3. Ha egy felnőttnek két olyan elkötelezettsége van, melyekben egyetlen közös gyermek van, és ez a gyermek azok egyike, melyeken az elkötelezettségek alapszanak, és egy másik felnőttnek, hasonló feltételek mellett két olyan elkötelezettsége van, melyekre külön-külön igaz, hogy az említett két felnőtt megfelelő elkötelezettségei ugyanolyanok, akkor a két elkötelezettségből képződő elkötelezettségek is ugyanolyanok az egyes felnőttek tekintetében.

Itt bizonyítandó, hogy az említett feltételek mellett fennálló két elkötelezettség együttesen szintén elkötelezettség. Érdekes ellentmondásra juthatunk diszkrét szakaszok esetén.

|- - - - - | |- - - |

Ha az itt bemutatott két „szakaszt” egyszer egymás mellé helyezzük (1), egyszer „egymásba fordítjuk” (2), két olyan szakaszpárt kapunk, melyek szeletei külön-külön egybevágóak, uniójuk mégsem az.

1: |- - - - - |- - - | 2: |- - ------|

Annak ellenére nem, hogy az egymásba fordítás esetén is érvényes, a szakaszok metszetének elemszáma egy!

Az elkötelezettségek nyíltsági problémája

Ahhoz, hogy belássuk, két „csatlakozó” vagy „társ” elkötelezettség is elkötelezettség, bizonyítani kell, hogy a kiemelkedően szerető gyermekek mindegyike az új megalapozásban is kiemelkedően szerető. Feltételezve a következő sémát: **A**-K_1-K_2-**B**-K_3-K_4-K_5-**C**, azt kell belátnunk, hogy az **AB** megalapozás - M(A,B) - szerint kiemelkedően szerető K_1, K_2 gyermekek - KSZ(K_1, K_2 ; M(A,B)) - illetve a **BC** megalapozás - M(B,C) - szerint kiemelkedően szerető K_3, K_4, K_5 gyermekek - KSZ(K_3, K_4, K_5 ; M(B,C)) - mindegyikére igaz, hogy **AC** szerinti megalapozásban szintén kiemelkedően szeretők! A szimmetria miatt elég az egyik megalapozással foglakozni, ezen belül, mivel egyik kiemelkedően szerető gyermek sem kitüntetett helyzetű, elég egyetlen kiemelkedően szerető gyermekkel foglalkozni. Elég tehát az **A**-K-**BC** sémával foglalkozni!

Állítjuk: *Nem bizonyítható, hogy K az AC megalapozás szerint is kiemelkedően szerető!*

Formalizálva:

$$\text{M(A,B), M(B,C), KSZ(K, M(A,B))} \quad \not\Rightarrow \quad \text{KSZ(K, M(A,C))}$$

A kszE1 egzisztencia axióma ugyan AB gyermekekhez mindenképpen generál egy C′ gyermeket, melyre B kiemelkedően szerető AC′ megalapozásban, de nem garantált, hogy C′ éppen a véletlenszerűen választott C gyermekkel azonos. Ha C gyermeket nem véletlenszerűen választjuk, hanem kifejezetten a kszE1 egzisztencia axiómára hagyatkozunk, akkor B ugyan kiemelkedően szerető lesz AC′ megalapozásban, de semmi sem garantálja, hogy K gyermek is kiemelkedően szerető legyen az AC′ megalapozásban. Ugyanis nincs kimondva a kiemelkedő szeretet tranzitív, átöröklődő tulajdonsága! *Nem bizonyítható tehát, hogy két csatlakozó szakasz szintén szakasz!*

A-K-**BC**: K közötte van AB-nek, B közötte van AC-nek. Sajnos K nem feltétlenül van AC között! A közötte levés öröklődő tulajdonságának kimondhatóságához az kellene, hogy egy független logikai környezetben megnyilatkozhatna a *„közötte levés”*, és mintegy „önjáró” módon hatna. Ezáltal tanulmányozható lenne viselkedése, jó esetben megfigyelhető lenne tranzitív tulajdonsága is. De nincs ilyen független logikai környezet! A *„közötte levést”* mi találtuk ki, nem fog életre kelni!

Nézünk egy óriási vásznat. A vásznon érdekes ecsetvonásokra figyelünk fel. Néhány ecsetvonást bekeretezünk: „jellegzetes”. Ezután azt mondjuk a „vászon világa” ezeken az alapokon nyugszik, és azt várjuk, lendüljön mozgásba a vászon, teremtődjön újra! Nem látjuk a vászon mögötti „festő szerkezetet”! Nem ismerjük működési mechanizmusát! A vászon mögötti teremtő mozgás miértjei rejtve maradnak!

A nemzetség és elkülönült szeretet axiómái

Az **e4** illetve **e5** elkötelezettségi axiómákban megjelenik a „szög” fogalma. A *szög* fogalmának a ***nemzetség*** fogalmát feleltetjük meg.

Az **esz** axiómában a *párhuzamosság* fogalmának az ***elkülönült szeretet*** fogalmát feleltetjük meg.

A szeretet-tér axiómái

Folytonossági axióma 1: AB és CD két tetszőleges szakasz. Van n darab olyan AA_1, A_1A_2, A_2A_3, … $A_{n-1}A_n$ szakasz, hogy mindegyikük egybevágó CD szakasszal és B az A és A_n között van.

Az eddigi axiómák ugyan végtelen számú gyermeket és felnőttet biztosítanak, azonban az így kialakult halmaz, *lehetséges*, hogy túl „laza szövésű”. AB szakaszt állandó hosszúságúnak (?) tekintve, az axióma ereje nyilván abban van, hogy A-ból indulva tetszőlegesen kis távolságú (?) pontok sorozatával is elérhető B.

Folytonossági axióma 2: Nincs olyan pont és nincs olyan egyenes, amelyet nem az axiómák generáltak volna, de mégis hozzácsatolható lenne absztrakt világunkhoz, az axiómák érvényben maradása mellett.

Ebből sajnos nem következik, hogy síkunk szövetében nincsenek olyan helyek, melyeket *nem-pontok* és *nem-egyenesek* töltenek ki, és az sem, hogy ezek a *nem-pontok* és *nem-egyenesek* ne befolyásolnák síkunk lokális tulajdonságait!

Abstract

Trying to grasp space experience in axiom systems of geometry

„*A point is that which has no part*." Euclid, a Greek mathematician begins his great scientific work with this term. In the rigorous thought system based on axioms, he tries to summarize geometric knowledge of his age. Getting to know his axioms, postulates and the elegant mathematical proofs, we can take a gratifying rest in the atmosphere of his way of thinking. Reading repeatedly, we can notice numerous interesting details which have accidentaly been disregarded before. Since we want to know the theory of Euclidean Geometry completely, we peruse literally the ideas of the author. Proceeding from the base, Euclid's particular assumption appears: the physical space is not empty, it is animate and has got a form. His Axioms of Parallelism purport to be that.

The embodied idea of the „animated space" in the axioms of parallelism had not been recognized by other mathematicians over almost two thousand years. János Bolyai, a Hungarian mathematician was the first who could entirely understand the thinking of Euclid. Hence, he was able to improve these ideas.

Has got the space a form indeed? And if it has got, how can we recognize these invisible forms? Further, we can explore a fascinating intellectual way through the axioms of Euclid and the theories of alternative axioms suggested by Bolyai and Hilbert.

Felhasznált irodalom

Bolyai János ***Appendix, A tér tudománya***
Akadémia kiadó, 1977

Euklidész ***Elemek***
Gondolat kiadó, 1983

Szabó Árpád ***A matematika alapjainak euklidészi terminusai***
MTA Közlemények 1961 III/XI

Tóth Imre ***A szubjektum és szabadsága***
Mérleg folyóirat, 2008 44. szám

Vincze Csaba ***Az abszolút geometria alapjai***
Jegyzet, Debreceni Egyetem, 2019

Ógörög-Magyar nagyszótár
Akadémia kiadó, 1993, Szerkesztette: Györkösy-Kapitánffy-Tegyey